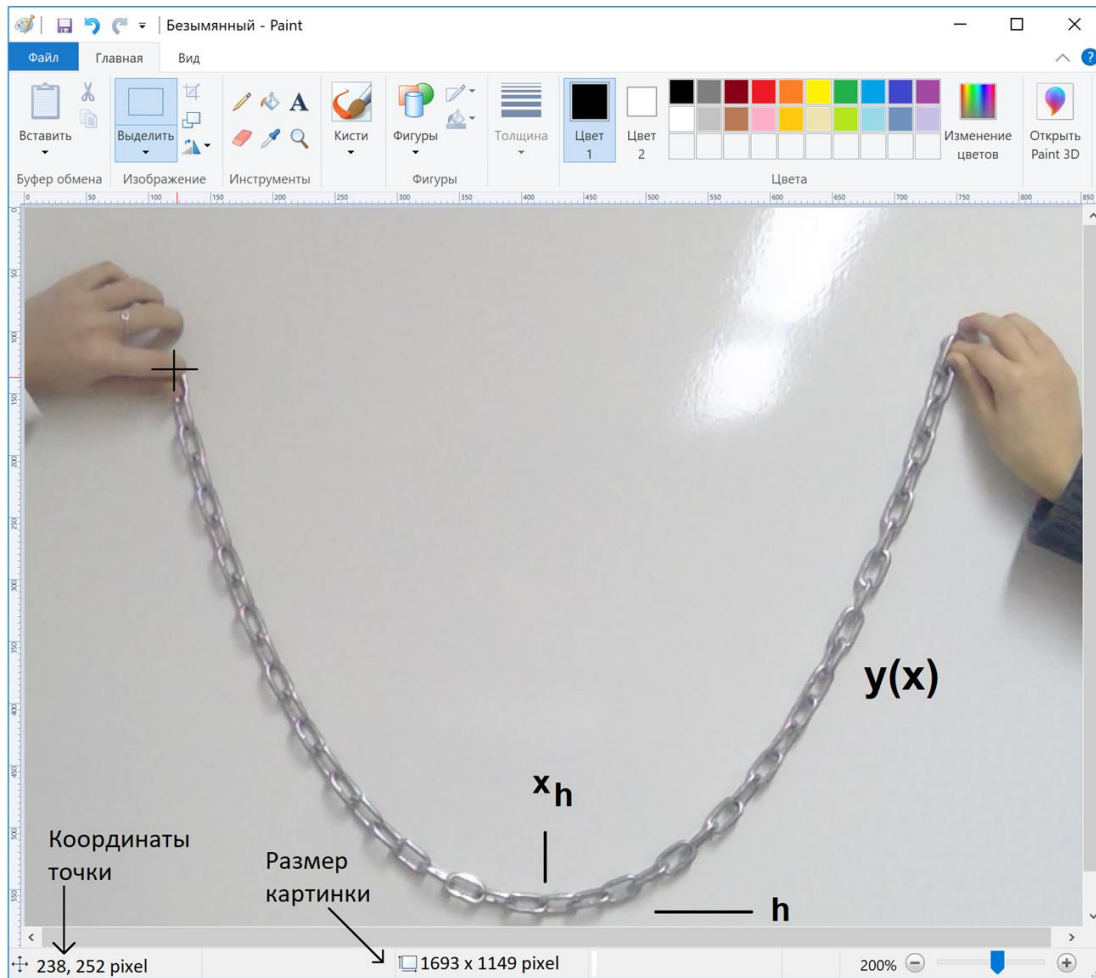


Физико-математическая лабораторная работа с цепочкой

© Очков В.Ф., 2024

На рисунке 1 показано вот что.

В среде графического редактора Paint открыта фотография металлической цепи, прижатой за два конца к школьной доске так, чтобы она свободно провисала. Прижали цепь к доске два ученика, проводящие со всем классом эту интересную физико-математическую лабораторную работу [1-3].



$$X := \begin{bmatrix} 238 \\ 386 \\ 833 \\ 1297 \\ 1477 \end{bmatrix} \quad Y := 1149 - \begin{bmatrix} 252 \\ 680 \\ 1107 \\ 735 \\ 252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 897 \\ 469 \\ 42 \\ 414 \\ 897 \end{bmatrix}$$

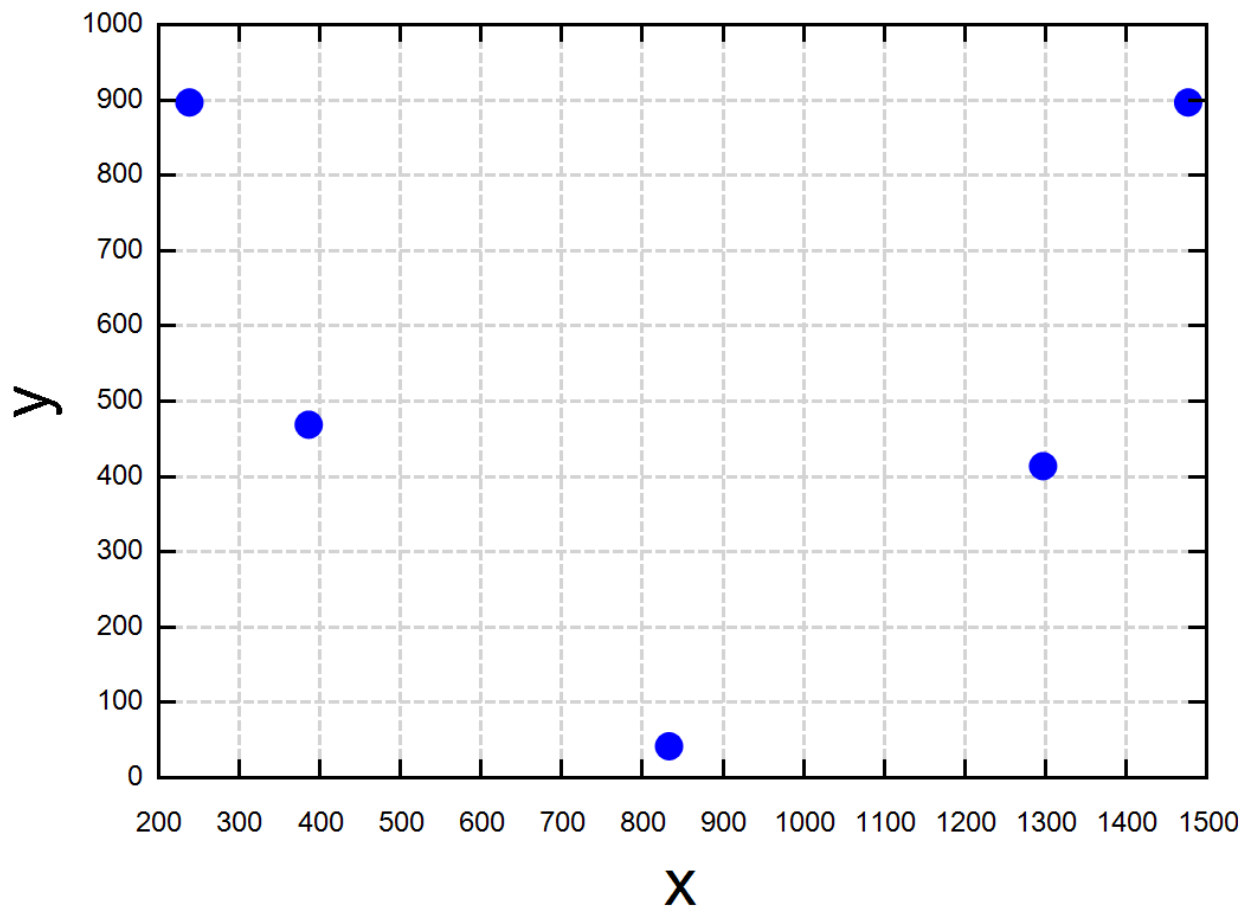
Рис. 1. Подопытная цепь

В среде Paint цепь была «оцифрована» так. К изображениям элементов цепи подводился курсор мышки, координаты которого (в пикселях) показывались в левом нижнем углу экрана этого графического редактора. Из рисунка 1 видно, что курсор (крестик) находится на левом конце цепи – на 238-м пикселе от левого края картинке и на 252-м пикселе от её верхнего края. Эти два числа были записаны первыми элементами векторов X и Y в среде математического пакета SMath Studio, который свободно скачивается с сайта www.smath.com. Затем курсор мышки перемещался к другой точке изображения провисающей цепи, и новая пара чисел (386 и 680) записывалась в векторы X и Y . Подобным образом были сняты координаты и других точек вплоть до последней (1477 и 252 – точка крепления цепи в правом её конце). Мы «оцифровали» только пять точек. Их число можно увеличить, но это не сильно скажется на результатах нашего физико-математического компьютерного эксперимента. Можно определить длину между пикселями на рис. 1 и оперировать уже не безразмерными координатами, а реальными расстояниями в миллиметрах, сантиметрах или метрах. Но это опять же не поменяет суть нашего опыта и его результаты.

Следует упомянуть, что есть специальные программы, автоматизирующие процесс «оцифровки» изображений: пользователь последовательно щелкает мышкой по кривой линии и автоматически получает два вектора с координатами точек. Но у нас, повторяем, всего лишь пять точек, поэтому такую работу мы сделали вручную, воспользовавшись самым распространенным и самым простым графическим редактором Paint, входящим в состав Windows.

На рисунке 1 показано, что значения элементов вектора Y вычитаются из величины 1149 (высота в пикселях картинке на рис. 1). Это сделано для того, чтобы «перевернуть» ось ординат: точка с нулевыми координатами на рис. 1 находится в *верхнем* левом углу, а на наших последующих графиках она будет находиться в *нижнем* левом углу (точка начала координат в прямоугольной системе).

На рисунке 2 точки, координаты которых хранятся в векторах X и Y , отображены на графике. Встроенная в SMath [4] функция `augment` объединяет два вектора в матрицу с двумя столбцами и пятью строками. К этой матрице добавляются ещё три столбца с информацией о виде точки, её размере и цвете.



```
augment (X, Y, ".", 7, "blue")
```

Рис. 2. Пять точек провисающей цепи

Подавляющее большинство людей на вопрос о том, по какой функции провисает цепь, ответят, что это парабола – самая популярная «школьная» кривая. И здесь ничего нет удивительного – даже великий Галилей так одно время считал.

А давайте проверим это утверждение!

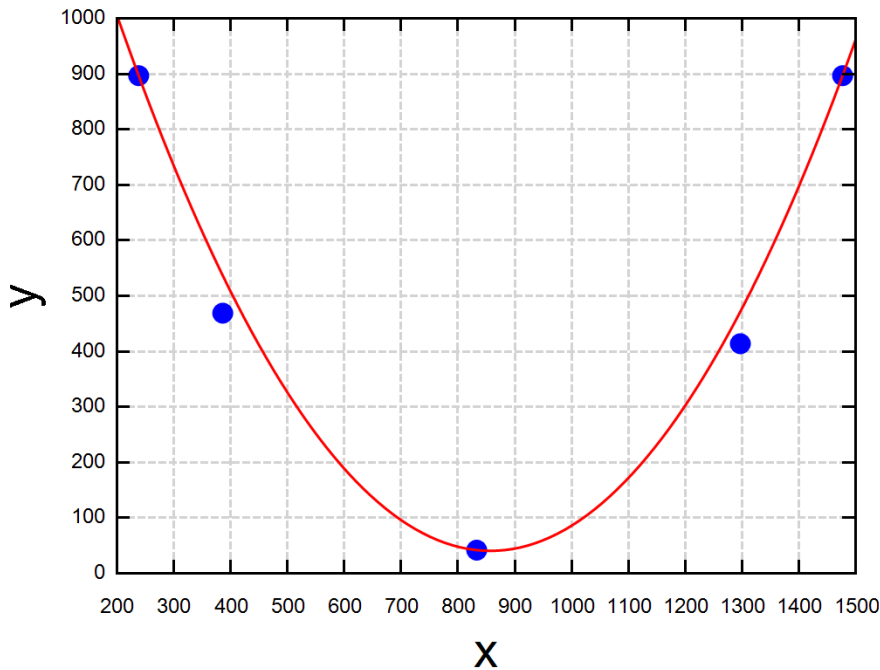
Известно, что параболу, ось которой параллельна оси ординат, можно провести через три точки¹. Каноническое уравнение этой кривой второго порядка в прямоугольной системе координат имеет вид $x^2 = 2p \cdot y$, где p – это фокальный параметр, который равен расстоянию от фокуса до директрисы параболы [5]. Есть и более привычная («школьная») квадратичная формула для этой кривой: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Но мы будем использовать ещё одну – менее известную, но более подходящую для нашей задачи формулу $a \cdot (x - x_h)^2 + h$ – см. первый оператор на рис. 3. У функции с именем y_p один аргумент x и три параметра: a , x_h и h . Конечно,

¹ Параболу как плоскую кривую второго порядка в общем виде можно провести через четыре точки.

с позиций математики и информатики у этой функции просто четыре аргумента: x , a , x_h и h . Деление аргументов на собственно аргументы и параметры мы сделали с позиций физики задачи. Параметр a отвечает за направление и «крутизну» кривой: при $a > 0$ мы имеем «провисающую» параболу, а при $a < 0$ – параболу в виде арки. При значении a , стремящемся к нулю, парабола будет «снизу или сверху» стремиться к прямой, параллельной оси абсцисс. Параметры x_h и h фиксируют координаты вершины параболы: минимум провисающей кривой или максимум кривой в виде арки. На рисунке 3 показано, как были найдены значения параметров a , x_h и h , при которых парабола проходит через первую (левый край цепи), третью (нижний край) и пятую (правый край) точки, координаты которых хранятся в векторах X и Y . Для этого была составлена система трех нелинейных алгебраических уравнения, которые решаются численно в среде пакета SMath с использованием встроенной функции `roots` (корни), которая меняет значения неизвестных (второй аргумент-вектор), начиная от первого предположения (третий аргумент-вектор), заданного пользователем, так чтобы три уравнения (первый аргумент-вектор) превратились в тождества. Вернее, почти в тождества: правые и левые части уравнений должны отличаться друг от друга не более, чем на заданную малую величину. Первые предположения для параметров x_h и h взяты, исходя из предполагаемых координат минимума искомой параболы: 40 и 860 пиксел. Для параметра a первое предположение (0.003) взято слегка «наобум». Главное, чтобы оно было больше нуля («провисающая» парабола, а не арка). Если бы мы использовали привычную квадратичную формулу для параболы $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, то задавать первые предположения для коэффициентов (параметров) a , b и c было бы сложнее. Этим и объясняется применение нами несколько необычной формы записи параболы на рис. 3. Полученное решение системы уравнений можно перенести на место первого предположения и убедиться, что решение ($a = 0.002231$, $x_h = 857.5$ и $h = 40.66$) не изменится.

$$Y_p(x, a, x_h, h) := a \cdot (x - x_h)^2 + h \quad \text{Parabola}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ x_h \\ h \end{bmatrix} := \text{roots} \left(\begin{bmatrix} Y_1 = Y_p(X_1, a, x_h, h) \\ Y_3 = Y_p(X_3, a, x_h, h) \\ Y_5 = Y_p(X_5, a, x_h, h) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ x_h \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.003 \\ 860 \\ 40 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.002231 \\ 857.5 \\ 40.66 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \text{augment}(X, Y, ".", 7, \text{"blue"}) \\ Y_p(x, a, x_h, h) \end{cases}$$

Рис. 3. Провисает ли цепь по параболе? Нет!

Детали решения систем уравнений, показанных на рис. 3, обсуждались на форуме пользователей SMATH по адресу:

https://en.smath.com/forum/yaf_postsm85735_al-nl-question.aspx.

На графике на рисунке 3 можно видеть, как наша парабола проходит через точки, «снятые» с фотографии цепи: три точки она «пронизывает», а около двух точек кривая проходит рядом.

Отсюда вывод: цепь провисает не по параболе, а по какой-то другой кривой, достаточно близкой к параболе. Эта кривая называется *цепной линией*.

Формулу цепной линии, включающей в себя гиперболический косинус, которую мы будем использовать ниже в расчёте, открыли почти одновременно и независимо друг от друга

Лейбниц, Гюйгенс и Иоганн Бернулли. Это было сделано через решения дифференциального уравнения, вытекающего из анализа провисающей цепи. Ниже показан вывод этого дифференциального уравнения, а также его аналитическое решение.

Из схемы задачи, показанной на рис. 4, можно вывести уравнение равновесия произвольного малого элемента (звена) цепочки длиной Δs , на который действуют распределенная сила тяжести, равная $g \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta s$, где g – ускорение свободного падения, ρ – плотность материала цепочки, A – площадь поперечного сечения цепочки и Δs длина элемента цепочки.

Переменная ΔP – вес элемента цепочки Δs .

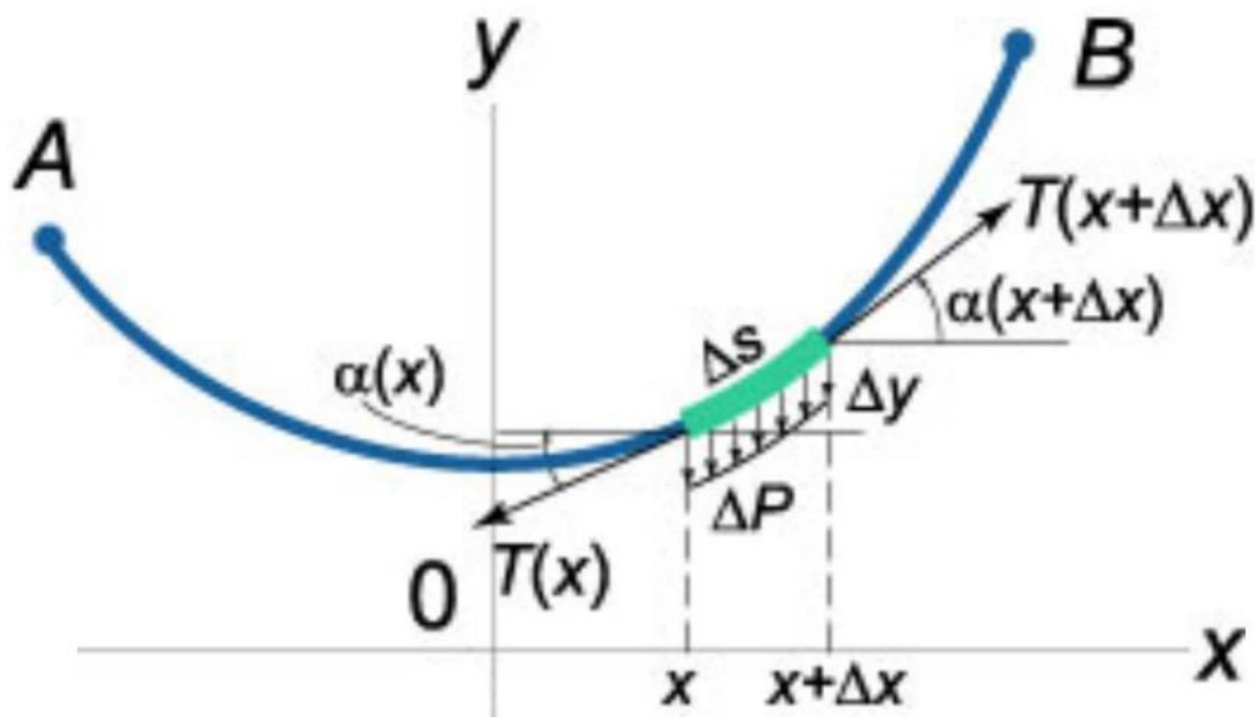


Рис. 4. Рис. 1.3. Схема задачи о провисающей цепочке (силы натяжения $T(x)$ и $T(x+\Delta x)$ в точках x и $x+\Delta x$)

На рисунке 5 записаны балансы сил T , действующих на элемент цепочки с опорой на вспомогательную функцию $\alpha(x)$ – угол наклона касательной. Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки является постоянной величиной и равна силе натяжения цепочки в её вершине – в самой нижней точке $T(0)$, где вертикальная проекция силы натяжения равна нулю. В центре рисунка 5 зафиксирован ключевой момент всего нашего математического анализа: переход от конечной разности Δ к бесконечно малому дифференциалу d , подстановка в уравнение «вертикального» баланса сил, уравнения «горизонтального» баланса сил, появление тангенса вместо синуса, деленного на косинус, замена тангенса на

производную и, наконец, появление самого дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентом (параметром) a , включающего в себя ускорение свободного падения g , плотность материала цепочки ρ и площадь поперечного сечения цепочки A . Параметр a имеет четкий физический смысл – это отношение горизонтальной проекции силы,рывающей цепочку, к удельному (погонному – на метр длины) весу цепочки. Сила измеряется в ньютонах, а удельный вес цепочки в ньютонах, деленных на метр. Отсюда вывод – размерность параметра a – это расстояние, измеряемое метрами, которые при расчетах обычно не учитывают и работают, как и мы с безразмерными величинами.

$$T(x) \cdot \cos(\alpha(x)) = T(x + \Delta x) \cdot \cos(\alpha(x + \Delta x))$$

$$T(x) \cdot \cos(\alpha(x)) = T(0) \quad \Rightarrow \quad T(x) = \frac{T(0)}{\cos(\alpha(x))}$$

$$T(x) \cdot \sin(\alpha(x)) - T(x + \Delta x) \cdot \sin(\alpha(x + \Delta x)) = g \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta s$$

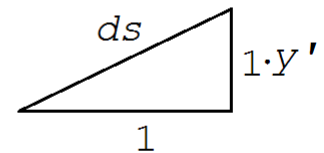
$$d(T(x) \cdot \sin(\alpha(x))) = g \cdot \rho \cdot A \cdot ds \quad \Delta x = dx$$

$$d\left(\frac{T(0)}{\cos(\alpha(x))} \cdot \sin(\alpha(x))\right) = g \cdot \rho \cdot A \cdot ds$$

$$d(T(0) \cdot \operatorname{tg}(\alpha(x))) = g \cdot \rho \cdot A \cdot ds \quad y'(x) = \operatorname{tg}(\alpha(x))$$

$$T(0) \cdot d(y'(x)) = g \cdot \rho \cdot A \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} \cdot dx$$

$$d(y'(x)) = \frac{g \cdot \rho \cdot A}{T(0)} \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$



$$y''(x) = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} \quad a = \frac{T(0)}{g \cdot \rho \cdot A}$$

Рис. 5. Вывод дифференциального уравнения цепной линии

На рисунке 7 показано аналитическое решение уравнения цепной линии с помощью приложения Maple, подключенному к пакету SMath. Функция `dsolve` (решить

дифференциальное уравнение) имеет один аргумент, объединяющий фигурными скобками само уравнение и два условия: цепная функция при $x=0$ равна параметру a и первая производная цепной функции при $x=0$ равна нулю. Фигурные скобки вводятся в расчет нажатием специальной кнопки, а второе условие вводится с использованием аккорда клавиш Shift+Ctrl+K, позволяющего в имена переменных вводить спецсимволы – круглые скобки: $D(y)(0)$.

$$\text{maple} \left(\text{dsolve} \left(\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{d}{dx} y(x)}^2 \\ y(0) = a \\ D(y)(0) = 0 \end{array} \right. \right) \right) = y(x) = a \cdot \text{ch} \left(\frac{x}{a} \right)$$

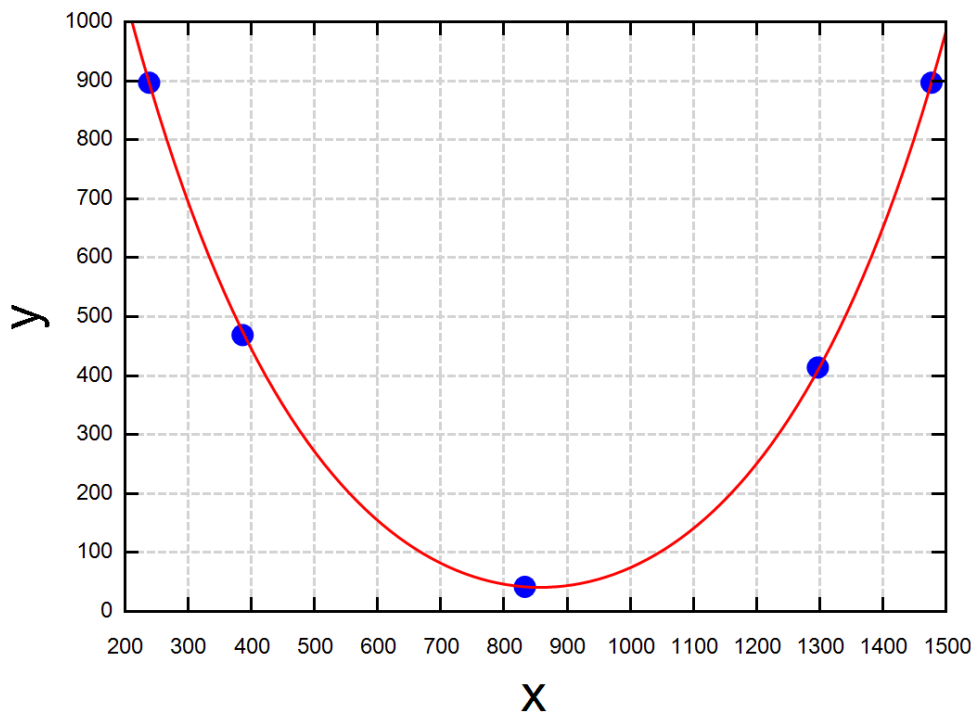
Рис. 6. Аналитическое решение дифференциального уравнения цепной линии

Через наши точки, расположенные на цепи (рис. 1), нужно проводить не параболу, а линию, которая так и называется – *цепная* линия. Её каноническая формула имеет один аргумент x и один параметр a : $a \cdot \text{ch}(x/a)$ – см. рис. 6. В этой формуле задействован гиперболический косинус ch . Что это такое – см. рис. 8 и 9.

На рисунке 7 показано повторение расчета на рис. 3, но не для параболы, а для цепной линии. Новая линия, похожая на параболу, но не парабола довольно точно пронизывает все пять точек (кружочков)! Что и требовалось доказать!

$$Y_c(x, a, x_h, h) := a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x - x_h}{a}\right) - a + h \quad \text{Catenary}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ x_h \\ h \end{bmatrix} := \operatorname{roots} \left(\begin{bmatrix} Y_1 = Y_c(X_1, a, x_h, h) \\ Y_3 = Y_c(X_3, a, x_h, h) \\ Y_5 = Y_c(X_5, a, x_h, h) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ x_h \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 300 \\ 850 \\ 50 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 309.7 \\ 857.5 \\ 41.03 \end{bmatrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{augment}(X, Y, ".", 7, \text{"blue"}) \\ Y_c(x, a, x_h, h) \end{array} \right.$$

Рис. 7. Провисает ли цепь по цепной линии? Да!

Наш эксперимент с цепочкой, сфотографированной на классной доске, позволяет довольно точно вычислить значение числа e – числа Эйлера, основания натурального логарифма. На рисунке 8 изображено численное решение в среде SMath уравнения цепной линии для левой точки, показанной на на рисунках 1-3 и 7. Используется встроенная функция `solve` (решить), но не из пакета Maple, а самого пакета SMath. У неё четыре аргумента – само уравнение, неизвестная, по которой ищется корень (у нас это переменная с именем `ex`), и два значения, ограничивающие диапазон численного поиска корня. Пятнадцать знаков ответа

(2.71828182808017) оказались довольно близки к истинным знакам (2.718281828459045 – два плюс семь, плюс два раза Лев Толстой, который родился в 1828 году, и плюс углы равнобедренного прямоугольного треугольника [6]). Такая же высокая точность была получена и при подсчете по третьей (2.71828182845902) и пятой (2.71828182808017) точкам. А вот по второй и четвертой точкам точность была не такой высокой – 2.702614348722 и 2.73441825151399. И это понятно – в уравнениях, показанных на рис. 7, фигурируют две верхние и одна нижняя точка.

$$y_c = \left[a \cdot \left(\operatorname{ch} \left(\frac{x - x_h}{a} \right) - 1 \right) \right] + h \quad \operatorname{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad e = 2.718281828459045$$

$$\operatorname{solve} \left(Y_1 = \left[a \cdot \left(\frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} - 1 \right) \right] + h, ex, 2, 3 \right) = 2.71828182808017$$

Рис. 8. Расчет значения числа e (числа Эйлера)

Впрочем, число e можно «вычислить» и так – просто аналитически решив уравнение, определяющее гиперболический косинус (рис. 9).

$$\operatorname{maple} \left(\operatorname{solve} \left(\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, ex \right) \right) = \begin{bmatrix} \exp(1) \\ \exp(-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \exp(1) \\ \exp(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.71828182845904 \\ 0.367879441171442 \end{bmatrix}$$

Рис. 9. Расчет значения числа e (вариант без физики)

Вывод

В классе с компьютерами, оборудованными графическим редактором и свободно распространяемой программой SMath, можно проводить довольно интересные лабораторные работы по образовательной технологии МИТ (математика-информатика-техника). К вышеописанной цепочке можно подвесить груз, имитируя тем самым канатную дорогу [7] и рассчитывая её параметры.

Литература:

1. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. — М.: Наука, 1980. — 240 с. URL: (<https://bookree.org/reader?file=469121&pg=3> или <https://dwg.ru/lib/1317>)
2. Очков В. Ф., Попова К., Камалов М. Цепная линия // Физика для школьников. № 3. 2018. С. 24-32 URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/fizika_dlya_shkolnikov_2018_03.pdf
3. Очков В. Ф., Цуриков Г.Н., Чудова Ю.В. Осторожно: цепная функция // Информатика в школе. № 4 за 2017 г. С. 58-62 URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Chain.pdf>
4. Информационные технологии в инженерных расчетах: SMath и Python / В. Ф. Очков, К. А. Орлов, Ю. В. Чудова [и др.]. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/EC-SMath.pdf>
5. Савелов Н.Н. Плоские кривые: систематика, свойства, применения. Справочное руководство. URSS. 2020. 294 с. URL: <http://www.vixri.ru/d/Savelov%20A.A.%20-%20Ploskie%20krivye%20-%201960.pdf?ysclid=m1npe1iqrt30909393>
6. Лев Толстой и математика / В. Ф. Очков, Н. А. Очкова. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : МПГУ, 2023. — 208 с. : ил. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tolstoy-Math-3.pdf>
7. Очков В.Ф., Чудова Ю.В. Проектируем канатную дорогу // Физика в школе. 2023. № 5. С. 40–46. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Cable_Car.pdf