Эксперимент

Академическая шапочка математика, или Гибрид символа, числа и графика в задаче оптимизации

В.Ф. Очков, Ю.В. Чудова, Н.А. Очкова,
НИУ МЭИ, ВШЭ (Москва),
e-mail: ochkov@twt.mpei.ac.ru

Аннотация: в статье рассмотрены аналитическое, графическое, численное и гибридное решения задачи о геометрическом теле с минимальной поверхностью при заданном объёме; обсуждается новая технология обучения STEM, предполагающая изучение на одном уроке математики, физики, химии и других дисциплин с привлечением вычислительной техники и компьютерных математических программ.

Ключевые слова: объём и площадь поверхности геометрического тела, функция, производная, решение уравнения, оптимизация с ограничениями, Mathcad, Maple.

– Я – мастер, – он сделался суров и вынул из кармана халата совершенно засаленную чёрную шапочку с вышитой на ней жёлтым шёлком буквой «М».

М. Булгаков. Мастер и Маргарита

Недавно в СМИ промелькнуло сообщение о том, что в старших классах школ Финляндии отменили предметы. Теперь финские старшеклассники не изучают отдельно математику, физику, химию, историю, родной и иностранный языки, а обсуждают и решают конкретные инженерные, научно-технические, экономические и другие задачи, опираясь на знания по математике, физике, химии, истории, филологии…

Полная отмена традиционных школьных предметов – это, конечно, крайность, вернее, некий педагогический эксперимент, требующий тщательного анализа и последующей корректировки. Оптимальным же вариантом может быть такая педагогическая практика, когда школьники или студенты, «решив конкретную инженерную, научно-техническую, экономическую или социальную задачу», расходятся по классам и аудиториям для более глубокого изучения математики, физики, химии, истории, родного и иностранного языков.

Но новое, как известно, – это очень часто не что иное, как хорошо забытое старое. В советской школе на уроках труда, например, делались попытки применить к решению конкретной задачи знания по школьным предметам. Было также много кружков технического творчества для внеклассной работы с детьми, где также использовались знания, полученные в школе. Все это называлось междисциплинарными связями и когнитивным образованием. Сейчас на Западе в ходу термин STEM (Science, Technology, Engineering & Mathematic) – ведение образовательного процесса с использованием науки, технологии, инженерного дела и математики. Новый и главный импульс этому процессу дали вычислительная техника и интернет.

В немецком языке, кстати, в ходу другая аббревиатура, более точно обозначающая данную технологию обучения, – MINT: M – Mathematik, I – Informatik, N – Naturwissenschaft (Естествознание) и T – Technik. Тут, как тому и положено, на первом месте стоит царица наук математика, получившая второе дыхание с развитием компьютерных символьных, численных и гибридных методов решения задач. Тандем математики и компьютера – это мощная база для нового этапа развития науки и техники. Слово mint, кстати, по-английски – это мята. Данная технология образования призвана освежить застоявшийся воздух в помещениях наших учебных заведений.

Слово stem переводится с английского как стебель, ствол. В этом контексте технологию образования STEM можно считать неким стволом (каркасом), от которого отходят ветви различных учебных дисциплин: математики, физики, теоретической механики, сопротивления материалов и т. д.

Дискуссии о роли компьютеров при освоении наук механико-математического направления часто вспыхивают в школах и вузах. Преподаватели высказывают крайние суждения на этот счёт. Многие считают, что математику в школе и в вузе нужно преподавать и осваивать сугубо «мелом на доске» и «ручкой на бумаге» и что компьютер может только навредить. Но тут приходится констатировать, что преподаватели, занимающие такую крайнюю позицию, просто не освоили современные математические программы, а используют компьютер только для офисных целей (интернет, электронная почта, электронная книга, пишущая машинка, ведение электронного журнала). Девиз таких преподавателей «Старую собаку новым фокусам не научишь!» Правда, они по понятным причинам этот девиз не афишируют и обосновывают свою позицию иными мотивами. Другие же преподаватели математики, физики, теоретической механики и др., освоившие компьютер до уровня своей специальности, используют его на занятиях наряду с «доской и мелом». И таких специалистов становится всё больше и больше.

Второй вопрос, который затронут в данной статье и прямо касается преподавания математики в школе и в вузе, таков: нужно ли уроки математики дополнять примерами из других дисциплин или нужно преподавать чистую математику (с компьютером или без него), игнорируя прикладные задачи?

Ну и третье. В настоящее время процесс решения инженерных задач и задач математической физики сделал резкий крен от аналитических к численным методам. Но преподавание математики и физики в школе и в вузе по-прежнему базируется, в основном, на «аналитике», а не «цифре». Это также является темой дискуссий.

Давайте рассмотрим конкретную задачу для «урока труда» по технологии STEM.

Каждый год в начале лета можно видеть, как молодые люди, облачённые в мантии и академические шапочки, радостно выбегают из дверей учебных заведений – настало время вручения дипломов бакалаврам и магистрам. По одной из легенд, академическая шапочка впервые появилась в стенах медресе. Выпускники этого мусульманского учебного заведения крепили сверху к своим фескам (ермолкам) издание Корана [1].

Раньше подобные события отмечались скромнее: на лацкан пиджака новоиспечённого инженера крепили значок вуза – академический нагрудный знак, который в народе называли поплавком. Это был синий ромб с белым кантом и гербом СССР посередине. Некоторые элитные вузы имели особые академические знаки. На знаке alma mater авторов этой статьи, например, была вузовская аббревиатура МЭИ, а уменьшенный герб помещался у верхнего угла ромба (рис. 1). Поплавком же этот знак называли не только из-за сходства с поплавком удочки, но и потому что высшее образование помогало оставаться «на плаву жизни».

Рис. 1. Авторский академический знак МЭИ

Некоторые университеты придумывают себе особые академические шапочки[1]. Давайте предложим такую особую шапочку выпускникам математических учебных заведений. Математика считается царицей наук и заслуживает особых внешних отличий. Иммануилу Канту приписывают изречение «В каждой естественной науке заключено столько науки, сколько

1 Во второй alma mater первого автора этой статьи – в Штутгартском университете, где он проходил научную стажировку, на человека, защитившего докторскую диссертацию в области теплоэнергетики, надевали академическую шапочку с целой тепловой электростанцией наверху. Там были и котёл, и паровая турбина; всё это вращалось и свистело, вырабатывая электроэнергию. Новоиспечённого доктора сажали на специальную тележку и возили по университетскому кампусу.

в ней есть математики!» («Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist!»). Просто вышить на шапочке букву «М» уже нельзя[2]. А вот буква π там будет вполне уместна. И не только по форме, но и по содержанию. И вот почему.

Давайте скроим и сошьём не просто академическую шапочку для математиков, а *оптимизированную шапочку*. Поиск оптимальных решений – это один из интереснейших и сложнейших разделов математики, имеющий важное практическое значение. Мы спроектируем шапочку в виде прямого кругового цилиндра, накрытого квадратом со стороной, равной диаметру цилиндра (рис. 2), и с минимальной площадью поверхности, вернее, с минимальным расходом материала на изготовление. Так можно сэкономить материал на пошив шапочки, решив заодно аналитически, графически и численно несложную, но красивую математическую задачу оптимизации.

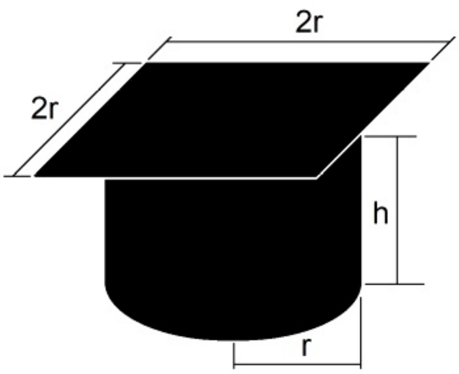

Рис. 2. Модель академической шапочки математика

На рисунке 3 показан документ с решением этой задачи оптимизации в среде математической компьютерной программы Mathcad[3].

2 См. эпиграф к статье. Знакомые с романом Булгакова могут принимать людей в шапочке с буквой М за… литераторов. Такая шапочка более подходит выпускникам литературных и филологических отделений вузов. Это будет некий кредит, пожелание стать мастером пера! Кроме того, людей в академических шапочках с буквой М станут принимать за ново-испечённых магистров. На шапочках бакалавров будет уместна буква В, а на шапочках докторов наук – буква D.

3 Это решение, конечно, несложно получить и вручную, без компьютера. Но сегодня мы всё чаще обращаемся к компьютеру при решении даже простых математических задач. Хорошо ли это или плохо – разговор особый.

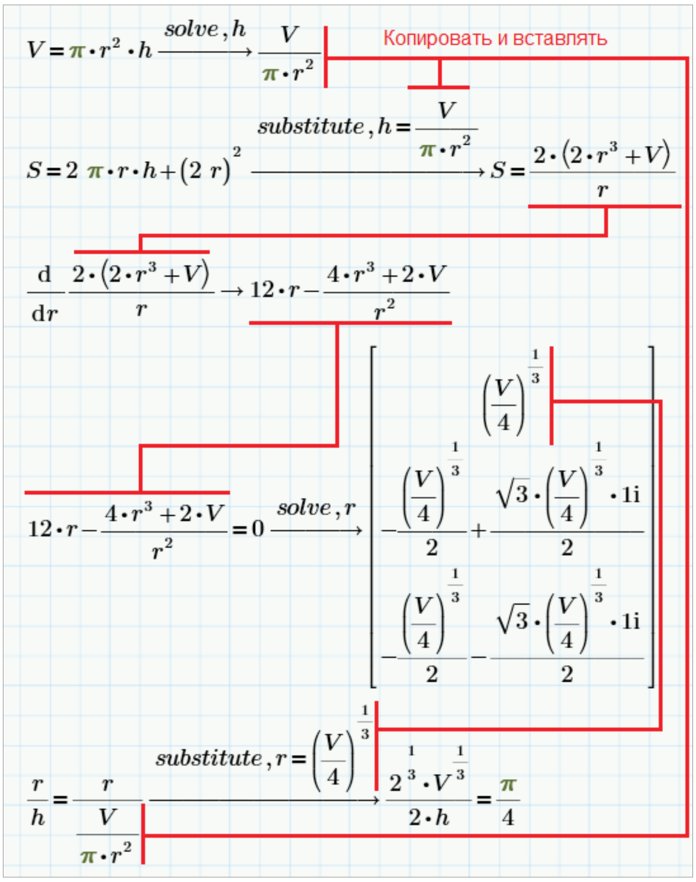

Рис. 3. Решение задачи об академической шапочке математика (Mathcad)

• Решается уравнение объёма цилиндра V для получения формулы, связывающей высоту цилиндра h с его объёмом и радиусом основания r.

• Выводится формула для вычисления суммарной площади поверхности S цилиндра и квадрата через объём и радиус основания цилиндра.

• От функции, выражающей суммарную площадь поверхности цилиндра и квадрата (функция с аргументом r и параметром-константой V), берётся производная.

• У полученной производной ищутся нули (у гладкой непрерывной функции в точке минимума производная, как известно, равна нулю) [2][4].

• Найденный нуль (один из трёх нулей – действительный, а не комплексный) подставляется в отношение r/h, что даёт ответ $\pi/4 \approx 0{,}785$.

4 Компьютеру можно помочь: преобразовать производную в простую дробь и искать нуль только у числителя, проверив при этом, что знаменатель не равен нулю. Да и вообще, эту задачу можно решить без компьютера, чего не скажешь об усложненной задаче (см. ниже).

Это выражение можно было бы и вышить на нашей оптимизированной академической шапочке математика, но и его можно «оптимизировать», сократить до π. И вот почему. Первый из авторов статьи прежде всего «примерил» спроектированную академическую шапочку на себе: рассчитал габариты шапочки для случая, когда она имеет 58-й, как у автора, размер. Читатель будет смеяться, но оказалось, что при длине окружности головы, равной 58 см, объём шапочки равен… *трём целым четырнадцати сотым* литра (рис. 4 и 9). Это успокоило и порадовало автора. Дело в том, что он по образованию не математик, а теплоэнергетик. Буква π на «фасаде» шапочки в этом случае будет просто указывать на размер головы, а не на «математическое содержание» надетой на неё шапочки.

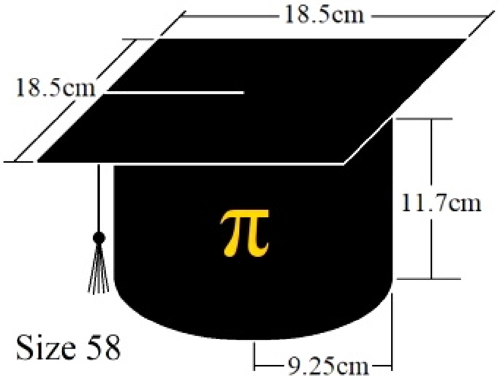

Рис. 4. Эскиз академической шапочки математика

Первый автор на одной из своих лекций по информатике [3] просит студентов-юношей написать на листочках бумаги свои рост, вес и размер головы[5]. Эти данные затем используются на лекции, посвящённой регрессионному анализу, как некая типичная статистическая выборка [4]. Средний арифметический размер окружности головы студентов оказался равен 57 см. Это и понятно: профессор должен быть несколько «умнее» своих студентов! 😉 Но следует ожидать, что головы студентов за время

5 Раньше, когда носили шляпы, кепки и меховые шапки, этот свой параметр почти все знали. Сейчас же, когда в ходу трикотажные головные уборы и безразмерные бейсболки, многие молодые люди не знают размеров этой самой важной части своего тела.

учёбы в вузе подрастут до 58-го размера. Так что этот размер можно считать самым подходящим для академических и прочих мужских головных уборов.

Оптимизацию процесса пошива академических шапочек можно продолжить. Будет очень интересно рассчитать, сколько потребуется ткани при оптимальном раскрое на квадраты и прямоугольники, идущие на пошив шапочек для всего выпуска университета так, чтобы было минимум обрезков. Эта задача оптимизации относится к классу задач линейного программирования. Термин «программирование» тут нужно понимать в смысле «планирования» (один из переводов английского слова programming). Он был предложен в середине 1940-х годов Джорджем Данцигом, одним из основателей линейного программирования, ещё до того, как компьютеры были использованы для решения линейных задач оптимизации [5]. Большой вклад в теорию линейного программирования внёс наш соотечественник Леонид Канторович, опубликовавший работу «Математические методы организации и планирования производства», за которую он получил престижную премию по экономике имени Альфреда Нобеля[6].

А теперь поговорим о численных (приближённых), символьных (аналитических) и графических компьютерных инструментах решения подобных задач оптимизации. Для этого рассмотрим более сложный пример, который без компьютера решить будет непросто.

Нужно найти параметры прямого кругового конуса, объединённого у основания с полусферой, при которых площадь поверхности составленного геометрического тела будет минимальна при заданном объёме. Задача тоже может «иметь сугубо практическое применение». Рожок с мороженым (рис. 5) при минимальной своей поверхности будет медленнее таять в руках математика, который жарким летом выбежал из дверей университета в тяжёлой академической мантии и решил охладиться мороженым.

---

6 Кстати, Абелевская премия, которая неофициально считается Нобелевской премией по математике, в 2020 году присуждена нашему соотечественнику Григорию Маргулису.

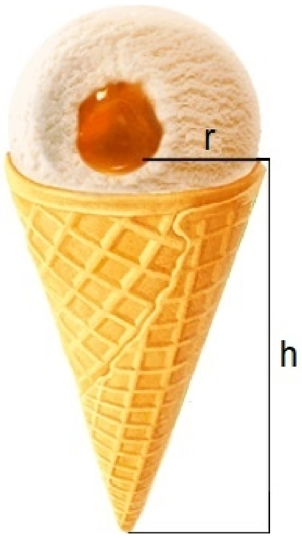

Рис. 5. Рожок с мороженым

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h+\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot r^3}{2}\xrightarrow{solve,h}\frac{3\cdot V-2\cdot\pi\cdot r^3}{\pi\cdot r^2}$$

$$S=\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}+\frac{4\,\pi\,r^2}{2}\xrightarrow{substitute,h=\frac{3\cdot V-2\cdot\pi\cdot r^3}{\pi\cdot r^2}}S=r\cdot\left(2\cdot\pi\cdot r+\sqrt{\frac{9\cdot V^2-12\cdot\pi\cdot V\cdot r^3+5\cdot\pi^2\cdot r^6}{r^4}}\right)$$

$$\frac{d}{dr}r\cdot\left(2\cdot\pi\cdot r+\sqrt{\frac{9\cdot V^2-12\cdot\pi\cdot V\cdot r^3+5\cdot\pi^2\cdot r^6}{r^4}}\right)\xrightarrow{factor}\frac{10\cdot\pi^2\cdot r^6-9\cdot V^2-6\cdot\pi\cdot V\cdot r^3+4\cdot\pi\cdot r^5\cdot\sqrt{\frac{9\cdot V^2-12\cdot\pi\cdot V\cdot r^3+5\cdot\pi^2\cdot r^6}{r^4}}}{r^4\cdot\sqrt{\frac{9\cdot V^2-12\cdot\pi\cdot V\cdot r^3+5\cdot\pi^2\cdot r^6}{r^4}}}$$

$$\boxed{A:=10\cdot\pi^2\cdot r^6-9\cdot V^2-6\cdot\pi\cdot V\cdot r^3+4\cdot\pi\cdot r^5\cdot\sqrt{\frac{9\cdot V^2-12\cdot\pi\cdot V\cdot r^3+5\cdot\pi^2\cdot r^6}{r^4}}=0\xrightarrow{solve,r}?}$$

Полученный результат этой символьной операции слишком длинный для отображения, но он может использоваться в последующих расчетах, если будет присвоен функции или переменной.

$$\boxed{B:=\frac{r}{\frac{3\cdot V-2\cdot\pi\cdot r^3}{\pi\cdot r^2}}\xrightarrow{substitute,r=A_6}?}\qquad B=0.8881127327$$

Полученный результат этой символьной операции слишком длинный для отображения, но он может использоваться в последующих расчетах, если будет присвоен функции или переменной.

Рис. 6. Попытка аналитического решения задачи о рожке с мороженым

На рисунке 6 показано решение этой задачи оптимизации методом, рассмотренным выше (применение производной и поиск её нулей). Но попытка найти нули у числителя производной функции, описывающей площадь поверхности заданного геометрического тела, была не совсем удачной (см. сообщение об ошибке у предпоследнего оператора на рисунке 6).

Само выражение пакет Mathcad так и не смог «вывести на печать», пришлось довольствоваться его приближённым значением 0,8881127… .

В последнем операторе на рисунке 6 ручной сменой индекса у переменной-вектора A (в пределах от 0 до 6) подставлялись (оператор substitute) различные нули, пока не был получен нужный численный ответ. Но само «абсолютно точное и абсолютно бесполезное»[7] выражение вывести на экран так и не удалось. Это выражение можно увидеть в среде математического пакета Maple. На рисунке 7 показана примерно одна сотая выражения для нулей производной, сгенерированного пакетом Maple при решении задачи об оптимальном рожке с мороженым. Полное выражение можно вышить золотом на чёрной мантии бакалавра или магистра.

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg(-\Bigg(3\Bigg(5\sqrt{\frac{5\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{2/3}+107\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}+305}{\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}}}\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{2/3}\\
&+1032\sqrt{3}\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}-214\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}\\
&\sqrt{\frac{5\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{2/3}+107\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}+305}{\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}}}\\
&+305\sqrt{\frac{5\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{2/3}+107\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}+305}{\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}}}\Bigg)\Bigg/\Bigg(\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}\\
&\sqrt{\frac{5\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{2/3}+107\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}+305}{\left(18\,I\sqrt{503}+253\right)^{1/3}}}\Bigg)\Bigg)^{1/2}-9\Bigg)\pi^2\Bigg)^{1/3}\Bigg),
\end{aligned}
$$

Рис. 7. Фрагмент выражения для нулей производной

Да, чисто символьное решение задачи часто не даёт ответа или даёт «абсолютно точный и абсолютно бесполезный ответ». Поэтому-то и приходится обращаться к вычислительной математике. Но оптимальным решением (опять оптимизация!) тут будет некая гибридная технология [6]:

7 Воздушный шар вырвался из облаков. Летящие увидели на земле человека и закричали: «Где мы находимся?!» – «Вы находитесь в корзине воздушного шара», – таков был ответ. Его дал математик. Только от математика можно услышать совершенно точный и совершенно бесполезный ответ.

сочетание символьной и вычислительной математики, а также графики при решении задач на компьютере.

На рисунке 8 показано гибридное решение задачи об оптимальном рожке с мороженым, полученное с помощью пакета Mathcad.

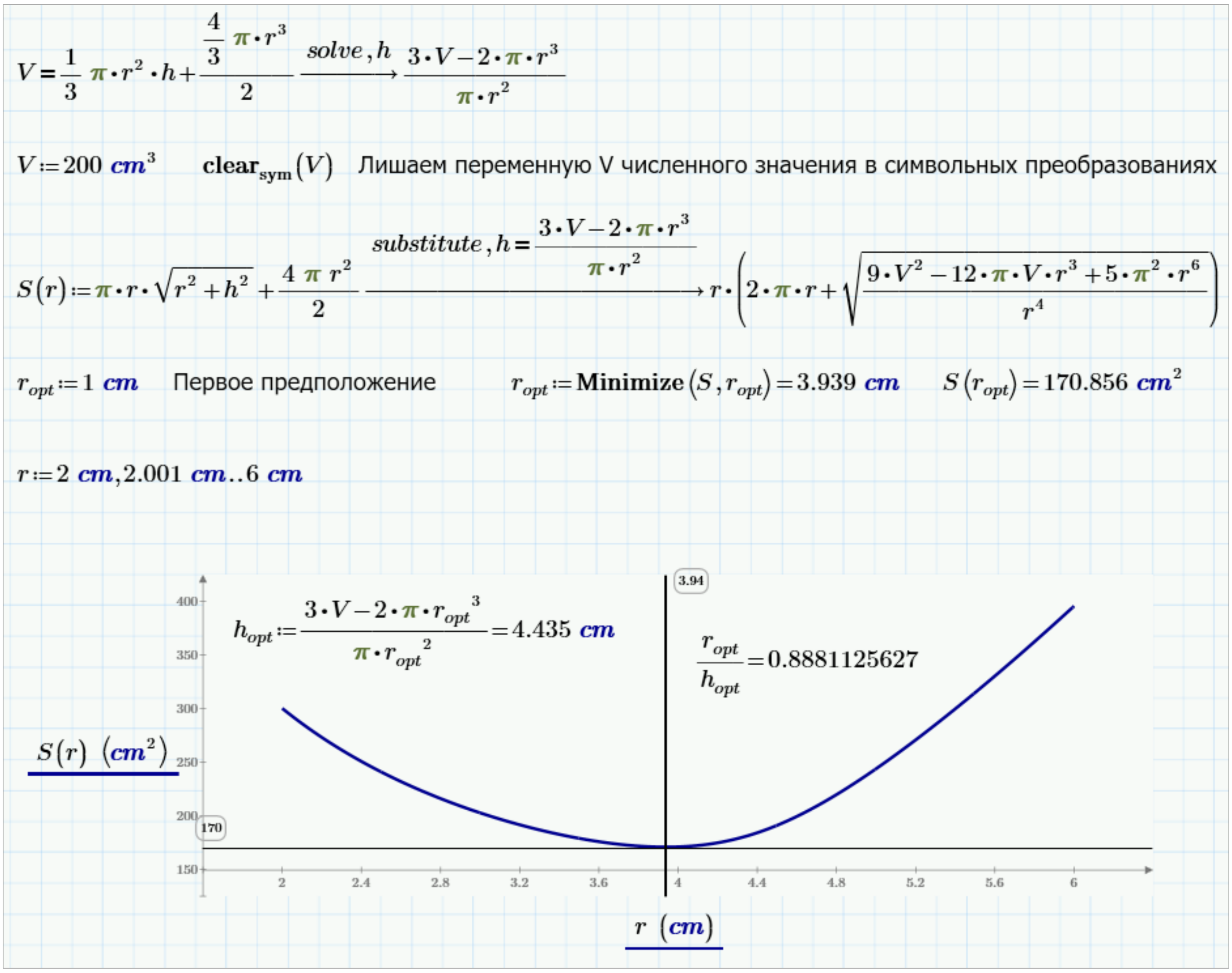

Рис. 8. Гибридное решение задаче о рожке с мороженым

Символьно формируется функциональная зависимость площади поверхности рожка с мороженым объёмом 200 см^3 от радиуса полусферы. У этой функции уже численно, а не аналитически ищется минимум с помощью встроенной функции Minimize, требующей начального предположения (у нас это 3 см). Найденное оптимальное значение радиуса r_{opt} = 3,939 см для наглядности показано на графике[8]. Далее рассчитывается оптимальное

8 Задачу можно решить и графически, не прибегая к функции Minimize. Для этого достаточно на графике маркерами отметить нужную особую точку – точку минимума.

значение высоты конуса $h_{\text{opt}} = 4{,}435$ см и оптимальное отношение r к h, которое можно сравнить с данным отношением, полученным аналитически (см. рисунок 6).

Возвращаясь к первому названию статьи, отметим, что задачу об оптимальной шапочке математика можно решить чисто численно, без «академических изысков». Такой расчёт будет контрольным, сделанным для проверки символьных вычислений, в которых возможны ошибки [7].

На рисунке 9 показано предельно упрощённое[9] численное решение задачи об оптимальной академической шапочке математика объёмом π литров. В задаче не один, а два параметра оптимизации. Сама же оптимизация ведётся с ограничением по объёму. В решении, показанном на рисунке 8, это ограничение было заложено в функцию площади поверхности заданного тела (в целевую функцию оптимизации).

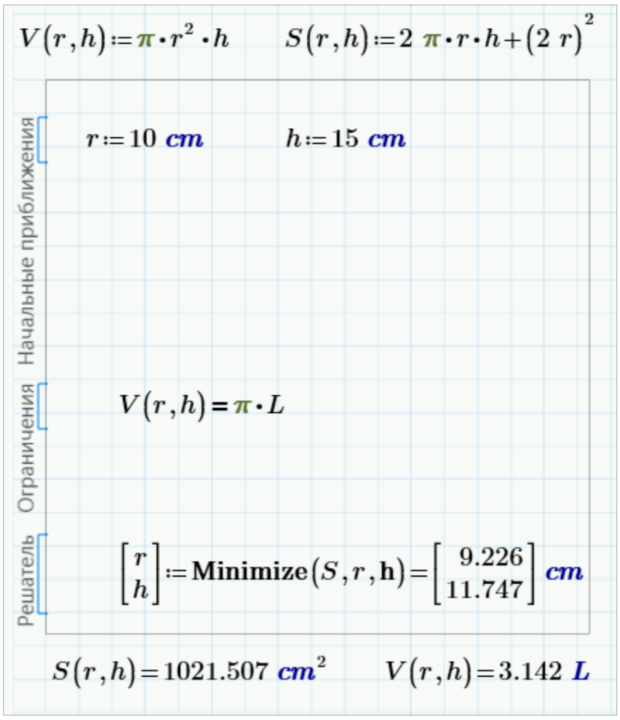

Рис. 9. Численное решение задачи об академической шапочке математика

9 Данное решение опирается KISS-принцип «Keep is simple, stupid!» – «Делай это проще, дурачок!». Он предписывает решать задачу на компьютере как можно проще, без «заумных изысков» (без преобразований, подстановок и т. д.).

Рассмотренная задача входит в коллекцию задач для обучения по технологии STEM, собранных в [3]. Данное учебное пособие переведено на английский язык и вышло в издательстве Francis & Tailor под названием «2^5 Problems for STEM Education» [8].

Источники

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Square_academic_cap.

2. *Очков В., Чудова Ю., Долгушев А.* Решение задачи на компьютере: число, график, символ // Информатика в школе. – № 3. – 2019. – С. 55–63.

См. также http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Cylinder.pdf.

3. *Очков В.Ф., Боголомова Е.П., Иванов Д.А.* Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2018. – 560 с.

См. также http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf.

4. *Очков В.Ф., Богомолова Е.П.* Интерполяция, экстраполяция, аппроксимация или Ложь, наглая ложь и статистика // Cloud of Science. – 2015. – Т. 2. – № 1. – С. 61–88.

См. также http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/CoS_2_1.pdf.

5. https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейное_программирование.

6. *Очков В.Ф., Бобряков А.В., Хорьков С.Н.* Гибридное решение задач на компьютере // Cloud of Science. – 2017 – Т. 4. – № 2. – С. 5–26.

См. также https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_14_168.pdf.

7. *Очков В.Ф., Федоров Ю.С., Воронова Ю.С., Моисеева А.Д.* Подводная лодка «Наутилус», и новые образовательные технологии // Cloud of Science. – 2018. – Т. 5. – № 1. – С. 5–39.

См. также https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_5_005.pdf.

8. https://www.crcpress.com/25-Problems-for-STEM-Education/Ochkov/p/book/9780367345259.