В. Ф. Очков, Е. П. Богомолова,

Национальный исследовательский университет МЭИ, Москва

ЭТО СТРАШНОЕ СЛОВО «ДИФФУРЫ»…

(Журнал "Информатика в школе" № 1 2015)

Вот что можно прочесть о диффурах в одном интернет-словаре молодежного сленга: *«Значение: дифференциальные уравнения, система или системы дифференциальных уравнений. Учебный курс по дифференциальным уравнениям, системам дифференциальных уравнений или по дифференциальному счислению вообще. Также соответствующий экзамен, лекция, курс лекций, задания и т. п. Примеры: “А еще эту задачку можно решить через диффуры”, “Народ, а кто у нас диффуры ведет?”, “Диффуры завтра сдавать, а у меня еще шпоры не писаны”».*

Слово «диффуры» появилось в студенческом и преподавательском сленге в незапамятные времена. Оно означало (и означает), как отмечено выше, сокращенное название учебного курса по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, а также по теории устойчивости.

Если преподаватель видит в этом курсе только формально-схоластическую составляющую, то он быстро превращает диффуры в «орудие пытки» студентов. Ведь аналитическое решение даже самых простых дифференциальных уравнений требует знания более десятка специфических приемов и хороших навыков интегрирования. Если же преподаватель глубоко понимает смысловую суть дифференциальных уравнений, тонко чувствует баланс между аналитическими методами теории дифференциальных уравнений и численными методами решения, то он легко вовлекает студентов в этот самый «физический» раздел математики.

Диффуры никак нельзя назвать выдумкой скучающих математиков. Диффуры — это наглядные, достоверные, проверенные временем методы и инструменты исследования окружающих нас реальных физических процессов, например, прохождения тока по электрической цепи или радиоактивного распада, падения тела под действием силы тяжести или колебания маятника.

С элементами теории дифференциальных уравнений школьники встречаются практически на каждом уроке физики. Но только этот факт от них по традиции скрывают. Учителя физики считают, что для ученика полезнее просто заучить расчетную формулу, чем понять, откуда эта формула взялась. Учителя математики считают, что достаточно заставить ученика выучить определение производной и научить его вычислять производную, пользуясь формальными правилами и таблицами, чем обосновать необходимость изучения школьниками этого непростого математического понятия.

Раньше у учителей были оправдания — недостаток иллюстративного материала, труднодоступность компьютерных средств решения дифференциальных уравнений. Сейчас такие оправдания несостоятельны. Любые физические и математические явления, изучаемые в рамках школьной программы, без труда моделируются с помощью вычислительных пакетов с доступным и понятным пользовательским интерфейсом, хорошей плоской и трехмерной графикой и анимацией. Появление этих пакетов дало нам возможность легко ввести учащегося в сложный мир динамических процессов. И сделать это следует как можно раньше — еще в школе.

Когда-то один из авторов проводил факультативные занятия по информатике в очень продвинутом московском лицее. В плане занятий помимо набора стандартных тем было и рассмотрение способов решения на компьютере (в среде математической программы Mathcad) *дифференциальных уравнений* — этих самых диффуров. Директор лицея (кстати говоря, физик по образованию, а по совместительству — профессор кафедры физики одного престижного московского вуза) сказал, что на слова «дифференциальные уравнения» в средней школе негласно наложен запрет. Школьникам разобраться бы с *алгебраическими* уравнениями, а тут им еще подсовывают *дифференциальные*… Но когда директору было показано, какие уравнения будут рассматриваться на занятиях и как они будут решаться на компьютере, то он изменил свое мнение и выразил уверенность, что школьникам все это будет и интересно, и понятно, а главное, полезно. Причем всем ученикам, а не только продвинутым в математике и физике.

Вот одна из задач, которая изменила мнение директора о диффурах в средней школе.

Типичная рутинная задача, которую традиционно решают на уроках физики, — это задача о свободном полете или падении тел:

Камень сбросили с крыши высокого дома или подбросили вверх под определенным углом к горизонту [1]. Вопрос: как будет меняться скорость камня и через какое время он упадет на землю?

При этом задача предельно упрощается: не учитываются, например, сопротивление воздуха, форма камня и другие факторы. Школьник, решая эту задачу, должен вспомнить или найти в учебнике набор готовых формул, подставить в них числа и получить ответ. Ученики зачастую и не подозревают, что эти формулы являются не чем иным, как решением этих «запретных» дифференциальных уравнений.

Давайте пустим в свободный полет не камень с крыши дома, а парашютиста с самолета или воздушного шара (стратостата) и посмотрим (рассчитаем), сколько он будет лететь и как будет в полете меняться его скорость. Постановка и решение этой задачи возникли под влиянием знаменитого прыжка с парашютом с высоты почти 40 км (из стратосферы) австрийца Феликса Баумгартнера (http://lenta.ru/news/2014/02/02/video/). Подобный прыжок с еще большей высоты в октябре 2014 года повторил Алан Юстас – исполнительный директор фирмы Google (http://www.profile.ru/mir/item/87941-ispolnitelnyj-direktor-google-pobil-rekord-vysoty-dlya-pryzhkov-iz-stratosfery).

Рассмотрим такую *математическую модель*: парашютист в начале полета — это шар с радиусом r_1 и массой 110 кг. После раскрытия парашюта он превращается в шар с радиусом r_2. Масса парашютиста не меняется. Прыгает парашютист с высоты h_1, а раскрывает парашют на высоте h_2. Эти исходные данные вводятся в Mathcad-расчет в виде таблицы (рис. 1), у которой первая строка — это имена переменных, вторая — единицы измерения, а третья — числовые значения.

Прыжок парашютиста. Исходные данные:

h_1	r_1	Масса	h_2	r_2	k	t_{end}
(м)	(см)	(кг)	(м)	(м)		(мин)
30000	30	110	1500	2.5	1.7	15

Изменение по высоте радиуса, площади сечения и объема парашютиста

$$r(h) := \mathbf{if}(h > h_2, r_1, r_2) \qquad \text{Сечение}(h) := \pi \cdot r(h)^2 \qquad \text{Объем}(h) := \frac{4}{3}\pi \cdot r(h)^3$$

Изменение плотности воздуха по высоте

$$\rho_{возд}(h_1) = 0.01002\ \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{возд}(h_2) = 1.058\ \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{возд}(0\ m) = 1.225\ \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{возд}(h) := \left\| \begin{array}{l} L \leftarrow 0.0065\ \frac{K}{m} \\ T_0 \leftarrow 288.15\ K \\ T \leftarrow T_0 - L \cdot h \\ M \leftarrow 28.9644\ \frac{gm}{mole} \\ p \leftarrow 101325\ Pa \cdot \left(1 - \frac{L \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g \cdot M}{R \cdot L}} \\ \rho_{возд} \leftarrow \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \end{array} \right.$$

Рис. 1. Исходные данные задачи о прыжке с парашютом

В задачу введены и дополнительные исходные данные: плотность воздуха $\rho_{возд}$ как функция высоты (формулы взяты из статьи "Плотность воздуха" в Википедии), коэффициент трения парашютиста о воздух k и предположительное время полета парашютиста t_{end}. После ввода исходных данных записываются три вспомогательные функции: изменение в зависимости от высоты полета радиуса шара-«парашютиста» r, площади его поперечного сечения *Сечение* и его объема *Объем*. Эти функции имеют вид ступенек: до раскрытия парашюта ($h >$

h_2) они возвращают одни значения, а после раскрытия — другие.

На рисунке 2 можно видеть «это страшное дифференциальное уравнение», «уравнивающее» силы, действующие на парашютиста. Это уравнение не что иное, как математическая запись второго закона Ньютона, гласящего, что сумма сил, действующих на тело, равна произведению его массы на ускорение. Ускорение же — это производная скорости по времени, а скорость (v) — это производная пути по времени. Отсюда и получаются дифференциальные уравнения, решением которых будут функции. Подстановка этих функций и их производных в исходное уравнение превращает дифференциальное уравнение в тождество.

Решить

Ограничения

$h(0\ \text{с}) = h_1 \qquad v(0\ \text{с}) = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ Начальные условия

$v(t) = \frac{d}{dt} h(t)$ Скорость - это производная пути по времени

Сила сопротивления воздуха — Архимедова сила — Вес

$$\text{Масса} \cdot \frac{d}{dt} v(t) = k \cdot \rho_{\text{возд}}(h(t)) \cdot \text{Сечение}(h(t)) \cdot v(t)^2 + g \cdot \text{Объем}(h(t)) \cdot \rho_{\text{возд}}(h(t)) - g \cdot \text{Масса}$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, t_{end}\right)$$

Рис. 2. Решение системы дифференциальных уравнений в среде Mathcad Prime

Заметим, что решением каждого дифференциального уравнения является не одна, а бесконечно много функций. Это обусловлено тем, что операция дифференцирования «не чувствительна» к прибавлению константы. Для того чтобы искомая функция определялась однозначно, нужны дополнительные (начальные) условия. Обсуждение необходимости задания начальных условий вполне допустимо и даже полезно в школьной аудитории. Во-первых, это повод усомниться в том, что все в мире определено однозначно. Во-вторых, легко будет продемонстрировать ученикам, что, прежде чем что-то начать искать, следует убедиться в существовании объекта поиска. В-третьих, очень уместно будет подчеркнуть различие между аналитическим и численным решениями, установить возможность подмены точного решения приближенным и обсудить с точки зрения физики правомерность такой подмены.

Дело в том, что пакет Mathcad решает дифференциальные уравнения численно (это делает функция *odesolve* — см. рис. 2), а не аналитически. Это означает, что мы получаем не формулы, а набор чисел — таблицу аргументов и значений искомых функций $v(t)$ и $h(t)$. По умолчанию в этой таблице по 1000 значений для каждой функции. Искомые табулированные функции можно интерполировать и изобразить графически. Например, показать на графике, как меняется скорость парашютиста $v(t)$ по высоте ($h(t)$ — см. верхнюю часть рисунка 3) или его высота $h(t)$ в зависимости от времени t (второй график на рисунке 3). Интересно также проанализировать изменение ускорение парашютиста в полете (последний график на рисунке 3) Изменяя начальные условия, можно проследить за тем, как будут меняться графики. Например, решить эту же задачу, но при условии, что в начальный момент времени парашютист имеет ненулевую скорость (полученную, например, в результате мгновенного воздействия).

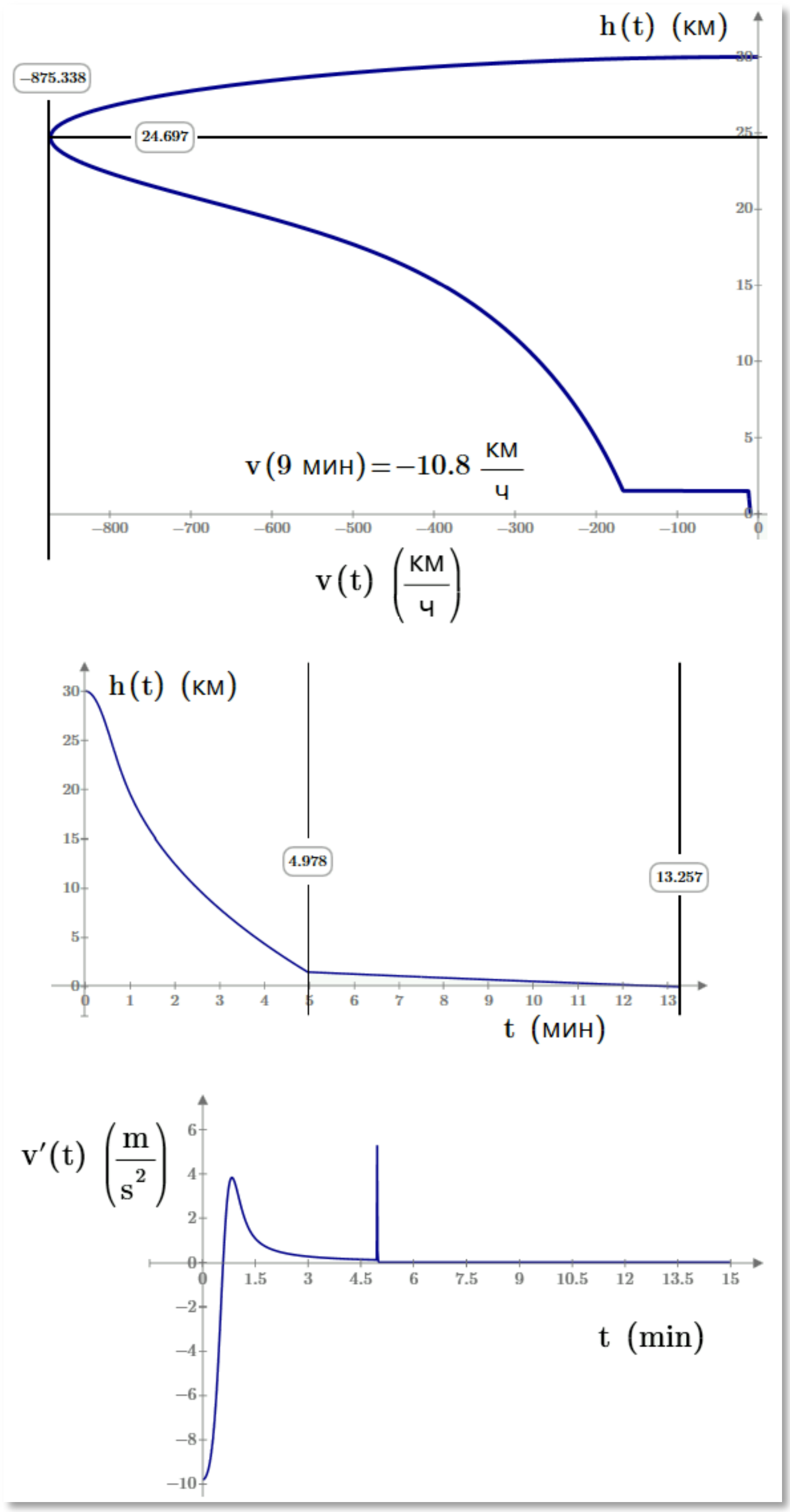

Рис. 3. График полета парашютиста

Какие силы действуют на парашютиста?

Первая сила — его вес: произведение массы на ускорение свободного падения g. Эта сила направлена вниз, поэтому-то она в уравнении со знаком минус. Вторая сила — это сила сопротивления воздуха, которой обычно пренебрегают при рассмотрении полета (падения) камня, но которой никак нельзя пренебречь в случае с парашютистом, иначе он разобьется в лепешку. Мы примем, что эта сила пропорциональна плотности воздуха, площади поперечного сечения падающего тела и квадрату его скорости. Коэффициент пропорциональности — это переменная k. Третья сила — это сила Архимеда — вес вытесненного парашютистом воздуха. Если парашют еще не раскрыт, то этой силой можно пренебречь, но если наш парашютист раскрыл парашют, «раздувшись» согласно нашей модели до шара с пятиметровым диаметром и массой в сто килограмм, то эту силу учитывать нужно. Две эти силы направлены вверх, поэтому в их формулах мы видим знак плюс. Все эти три силы, повторяем, уравновешиваются силой инерции — произведением массы на ускорение.

Задачу можно усложнять — учитывать, например, изменение значения ускорения свободного падения по высоте, не шарообразную, а более сложную форму летящего парашютиста, изменение значения коэффициента k в зависимости от режима обтекания тела (ламинарный или турбулентный — это все предмет изучения науки аэродинамики), горизонтальную составляющую полета парашютиста, связанную со скоростью самолета, из которого он прыгнул, и/или со скоростью ветра. Но и без этого наше решение получилось вполне правдоподобным: парашютист в свободном полете около пяти минут постепенно набирает скорость до 875 км/ч, затем скорость падает вследствие роста плотности воздуха. После раскрытия парашюта скорость парашютиста резко уменьшается до 11 км/ч. С такой скоростью он и приземляется после 13 минут полета. Можно снять еще одно допущение. У нас при $h > h_2$ парашют раскрывается моментально. В реальности это происходит за некие доли секунд, что можно учесть, сделав функцию $r(h)$ более сложной: не ступенькой, а неким пандусом.

Естественно, возникает сомнение: адекватно ли дифференциальное уравнение описывает процесс? Ответ на этот вопрос можно получить в ходе эксперимента. Нам доступен вычислительный эксперимент, т. е. неоднократное решение уравнения при различных начальных условиях и анализ результатов [1].

В настоящее время многие физические кабинеты школ оборудованы компьютерами с мультимедийными проекторами. В таком кабинете можно проводить физические опыты (изучать, например, колебание маятника), показывая на большом экране эксперимент так, чтобы всем было хорошо все видно. Но на этом же экране можно показывать решение дифференциального уравнения колебания маятника [4], сравнивать реальное физическое явление с его математической моделью, объясняя расхождения ограничениями и упрощениями модели.

Уравнения — и алгебраические, и дифференциальные — страшны для школьников и студентов не сами по себе, а методами их решения. Сейчас на компьютере решать такие уравнения можно довольно просто. Главное — составить уравнение или систему уравнений, понимая физику задачи… Поэтому такие задачи могут стать не «пытками» (см. начало статьи), а удовольствием и для учеников, и для учителей…

На сайте: https://www.ptcusercommunity.com/groups/dynamic-models-in-mathcad авторы разместили большое количество различных динамических задач с их решениями в среде Mathcad и анимацией средствами Mathcad [2]. Вот некоторые из них:

- колебание одиночного маятника;
- колебание связанных маятников;
- вращение планет со спутниками;
- старт ракеты из подводной лодки;
- ныряние человека в воду;
- скатывание саней с горки;
- движение автомобиля;
- движение по подземному тоннелю гравитационного поезда и др.

Интернет-источники

1. *Арнольд В. И.* О преподавании математики // Успехи математических наук. Т. 53. Вып. 1 (319). 1998. http://www.ega-math.narod.ru/Arnold2.htm

2. *Очков В. Ф.* Живые кинематические схемы в Mathcad // Открытое образование. 2013. № 3. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/kinematic.html

3. *Очков В. Ф.* Задачи по физике: новый подход к решению // Открытое образование. 2012. № 6. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/Physic.pdf

4. *Очков В. Ф.* MCS на занятиях по математике, физике, информатике… // Компьютерные учебные программы и инновации. 2008. № 3. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Pendulum