

## Три окружности, стянутые резинкой

Или

## Новый маятник

*Комаров смотрит и видит шар.*

*“Что это?” – шепчет Комаров.*

*А с неба грохочет: “Это шар.”*

*“Какой шар?” – шепчет Комаров.*

*А с неба грохочет: “Шар гладкоповерхностный!”*

Даниил Хармс «О явлениях и существования»

По просторам Интернета «гуляет» вот такая задача – рис. 1.

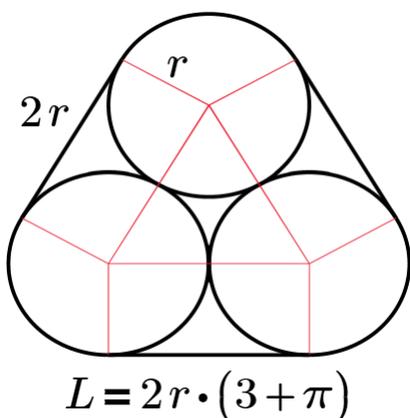


Рис. 1. Три окружности, стянутые веревкой

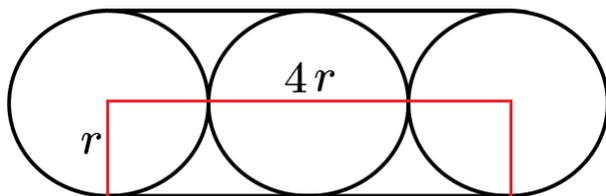
Есть три окружности с одинаковыми радиусами  $r$ . Необходимо найти длину «веревки», связывающей их воедино в виде пирамиды.

Ответ найти довольно просто. Для этого нужно начертить отрезки прямых, соединяющие центры окружностей между собой. Получится равносторонний треугольник со сторонами  $2r$ . Далее необходимо соединить центры окружностей с точками, где «веревка» отрывается от окружностей. Получатся три прямоугольника со сторонами  $r$  и  $2r$ . Длина «веревки»  $L$  будет равна длине одной окружности (длина трех дуг окружности с углом  $120$  градусов) плюс шесть радиусов окружностей (три длинные стороны прямоугольников). Соответствующую формулу можно увидеть внизу рисунка 1.

Задачу, кстати, можно обобщить: найти длину веревки, связывающей любое число окружностей любого радиуса. Если оставить три разных окружности, но «связывать» их не веревкой, а треугольником, то мы приходим к задачам, решенным итальянским математиком Мальфатти [1] (треугольники Мальфатти и задача Мальфатти).

А давайте перейдем от математики (геометрии) к физике и возьмем три одинаковых цилиндра массой  $m$  (три круглых карандаша, например, или три алюминиевые банки с напитками – см. рис. 9 ниже), стянем их не веревочкой, а круглой (замкнутой) резинкой. Примерно так

стягивают в пучок волосы на голове или банкноты в пачку. А потом положим все это плашмя на стол – см. рис. 2. Что произойдет?



$$L = 2r \cdot (4 + \pi) \frac{4 + \pi}{3 + \pi} = 1.163$$

Рис. 2. Три цилиндра (вид с торца), стянутые резинкой и положенные на стол (показана формула длины резинки  $L$  и её относительное удлинение по сравнению со случаем, показанным на рис. 1)

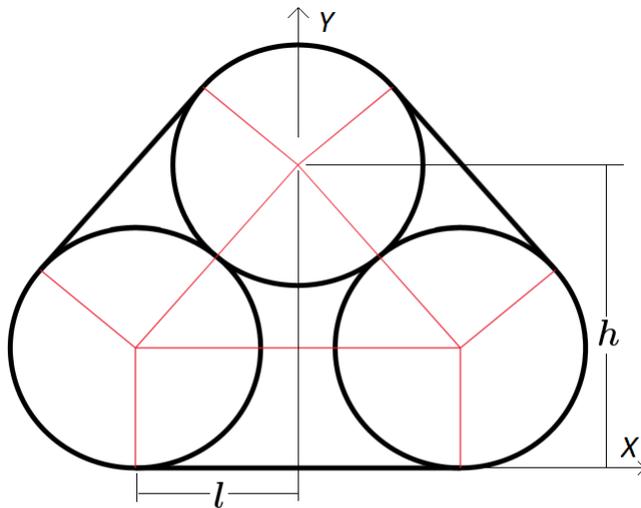
Ответ тоже может показаться довольно простым: резинка стянет три цилиндра в пирамиду, показанную на рис. 1. Длина резинки при этом минимизируется. Так мыльный пузырь «стягивается» в шар, у которого, как известно, минимальная поверхность среди геометрических тел одного объема.

Но резинки бывают разными – с разной жесткостью. Тут самое время вспомнить знаменитый «школьный» закон Гука, гласящий, что растяжение резинки пропорционально силе, к ней приложенной. Коэффициент пропорциональности – это коэффициент упругости  $k$  (коэффициент Гука). Материалов, отвечающих такому линейному закону, в природе нет. Вернее, дело обстоит так. При незначительных растяжениях мы имеем некую линейность, существенно упрощающую расчеты. Наша резинка будет удлиняться менее чем на 17% (см. рис. 2 с числом 1.163...), и мы вправе применить тут линейный закон Гука<sup>1</sup>. Но при значительных растяжениях линейность пропадет [2]: если резинку сильно растягивать, то она постепенно перестанет удлиняться, а потом и вовсе порвется. Если в наш расчет ввести нелинейность, то задача несколько усложнится (в формуле потенциальной энергии резинки появится интеграл), но характер ответа останется прежним.

Так вот, если резинка достаточно эластичная, то может произойти вот что.

Средний цилиндр может оказаться в стабильном положении, показанном на рис. 3, характеризуемым тем, что сумма потенциальных энергий верхнего цилиндра и растянутой резинки окажется минимальной (принцип Д'Аламбера – Лагранжа [3]). Докажем это простым физико-геометрическим расчетом с учетом того, что треугольник, соединяющий центры окружностей (см. рис. 1), теперь будет не равносторонним, а равнобедренным с длиной основания  $2l$  и боковыми сторонами, равными  $2r$ .

<sup>1</sup> 17 и 7 – это два красивых простых числа. Если рассматривать простейший маятник (груз, подвешенный на веревочке), то там фигурирует число 7. Условно считается, что при угле отклонения маятника от вертикали меньшем чем 7 градусов, в дифференциальном уравнении такого маятника синус угла можно заменить на сам угол, что существенно упрощает решение задачи и дает знаменитую «школьную» формулу периода колебания маятника. Кстати, у простейшего маятника можно тоже заменить жесткую веревочку на эластичную резинку...



$$l = \sqrt{(2r)^2 - (h - r)^2}$$

$$L = 2(l + \pi \cdot r + 2r)$$

Рис. 3. Подвешенный центральный цилиндр

На рисунке 4 показана созданная в среде Mathcad [4] функция  $PE$  с аргументами  $h$  и  $k$ , возвращающая потенциальную энергию нашей механической системы, состоящей из трех цилиндров и стягивающей их резинки. Эта энергия складывается из потенциальной энергии приподнятого среднего цилиндра  $PE_D$  и потенциальной энергии растянутой резинки  $PE_B$ . Резинка, повторяем, растягивается на величину  $\Delta L$  незначительно, поэтому можно задействовать в расчетах линейный закон Гука. Формула для потенциальной энергии растянутой резинки с коэффициентом упругости  $k$ , умноженным на половину квадрата растяжения резинки  $\Delta L$ , повторяет формулу кинетической энергии, где вместо коэффициента упругости выступает масса, а вместо растяжения – скорость. Сразу вспоминается рогатка, передающая потенциальную энергию растянутой резинки в кинетическую энергию вылетающего из рогатки камня...

Но мы отвлеклись! Вернемся к нашей задаче!

$$m := 1 \text{ kg} \quad r := 1 \text{ m}$$

$$PE(h, k) := \left\| \begin{array}{l} PE_D \leftarrow m \cdot g \cdot (h - r) \\ PE_B \leftarrow \left\| \begin{array}{l} l \leftarrow \sqrt{(2r)^2 - (h - r)^2} \\ L \leftarrow 2(l + \pi \cdot r + 2r) \\ \Delta L \leftarrow L - 2r \cdot (3 + \pi) \\ k \cdot \frac{\Delta L^2}{2} \end{array} \right. \\ PE_D + PE_B \end{array} \right.$$

Рис. 4. Формула потенциальной энергии трех цилиндров, стянутых резинкой

На рисунке 5 показан график изменения потенциальной энергии нашей механической системы с некой потенциальной ямой – с локальным минимум суммы энергий (точка С). Как догадывается читатель, коэффициент  $k$  (6.5 ньютонов на метр) был подобран так, чтобы у данной кривой появился локальный минимум, а правый конец кривой (точка D) был несколько выше локального максимума (точка В).

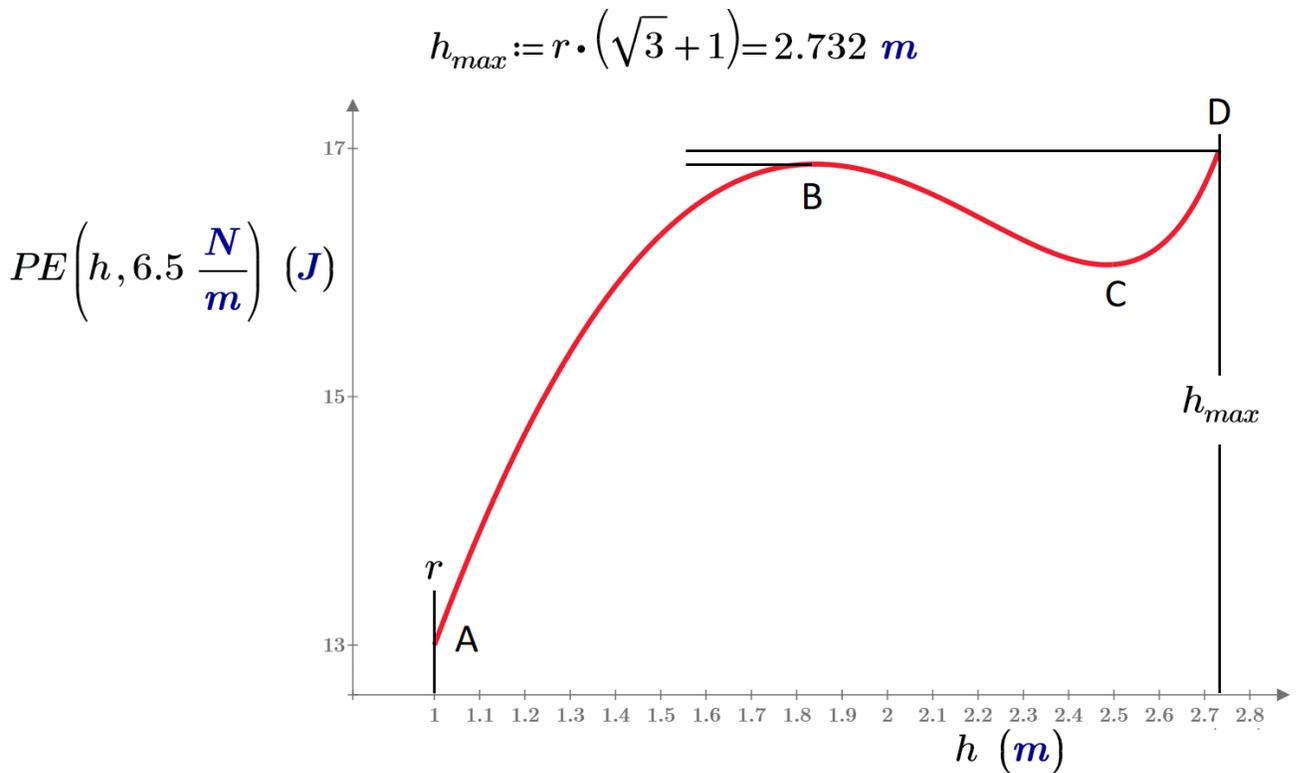


Рис. 5. График изменения потенциальной энергии трех цилиндров, стянутых эластичной резинкой (вариант 1)

Итак. Три цилиндра с радиусом  $r$  в один метр и массой  $m$  в один килограмм<sup>2</sup> стянуты резинкой с коэффициентом жесткости  $k$ , равным шести с половиной ньютонов на один метр, и выложены на стол ( $h = r$ , точка А на рис. 5, см. также рис. 2). Затем мы медленно приподнимаем средний цилиндр (увеличиваем значение  $h$ ) и помещаем его в локальный максимум (точка В). Здесь цилиндр будет находиться в метастабильном неподвижном состоянии. Малейшее внешнее воздействие (легкий удар по столу, например) может вернуть цилиндр на стол (точка А,  $h = r$ ), либо... превратить его в своеобразный маятник, который станет перекатываться около локального минимума (точка С). Скорость затухания такого маятника будет зависеть от сил трения, которыми в нашем мысленном эксперименте можно пренебречь.

Можно поступить по-иному. Переместить средний цилиндр почти на правый край кривой (точка D на рис. 5,  $h = h_{max}$ ) и отпустить его. Если мы поднимем цилиндр выше точки локального максимума, то цилиндр «перекатится» через этот максимум и упадет на стол. Если же цилиндр будет поднят не так высоко, то он станет вести себя как маятник – будет «перекатываться с боку на бок» около локального минимума.

Но если коэффициент упругости  $k$  стягивающей резинки уменьшать, то маятника мы не получим. Средний цилиндр после того, как его приподнимут, «скатится» вниз на стол по кривой, показанной на рис. 6. На этой кривой также есть метастабильная точка, но это не локальный максимум, а точка перегиба, координаты которой несложно найти через численное решение системы двух уравнений с двумя неизвестными (рис. 6 – равенство нулю первой и второй производных функции потенциальной энергии). В этой точке средний цилиндр будет неподвижен, но «удар по столу» заставит его скатиться вниз.

---

<sup>2</sup> Эти значения, конечно, условные. Но сразу вспоминается старый метрологический анекдот. Диалог на экзамене. Преподаватель: – Что такое лошадиная сила? Студент: – Это сила, какую развивает лошадь ростом в один метр и весом в один килограмм. – Да где же вы такую лошадь видели!? – А её так просто не увидишь. Она хранится в Париже, в Палате мер и весов.

Вариант ответа современного школьника – жертвы ЕГЭ и рекламы, еще больше шокирующий преподавателя: лошадиная сила – это... шампунь.

Solve

Guess values	$h := 2 \text{ m}$	$k := 7 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
Constrains	$\frac{d}{dh} PE(h, k) = 0 \frac{\text{J}}{\text{m}}$	
	$\frac{d^2}{dh^2} PE(h, k) = 0 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$	
Solver	$\begin{bmatrix} h_1 \\ k_1 \end{bmatrix} := \text{Find}(h, k)$	

$h_1 = 2.217 \text{ m}$        $k_1 = 5.446 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

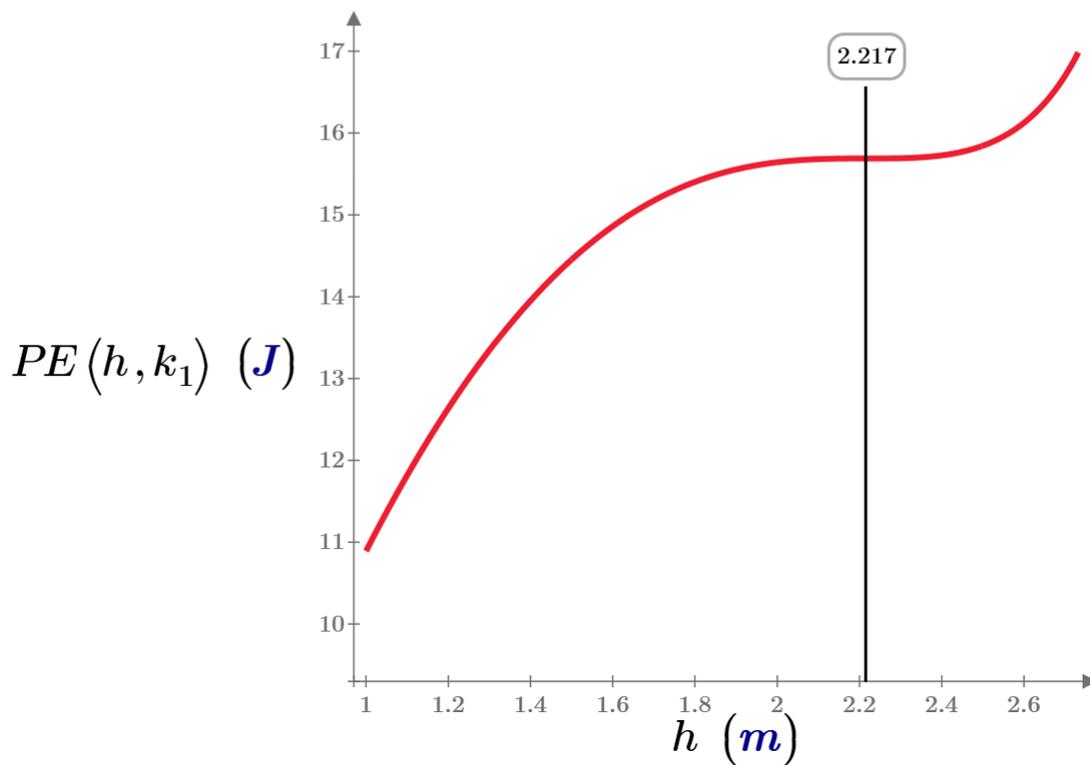


Рис. 6. Расчет точки перегиба на кривой потенциальной энергии и график изменения потенциальной энергии трех цилиндров, стянутых эластичной резинкой (вариант 2)

Если же резинка будет достаточно жесткой (рис. 7), то три цилиндра, лежащие на столе, также будут находиться в метастабильном состоянии. Но «легкий удар по столу стянет цилиндры в пирамиду, показанную на рис. 1. При этом средний шар необязательно должен оказаться наверху. Один из крайних шаров может начать подниматься первым, и вся конструкция перевернется набок.

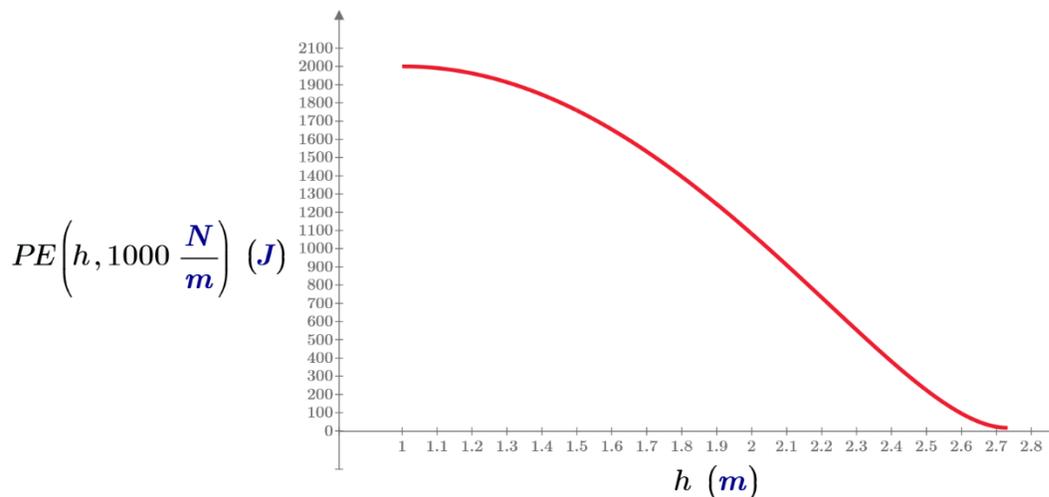


Рис. 7. График изменения потенциальной энергии трех цилиндров, стянутых жесткой резинкой (вариант 3)

Несложно доказать, что на концах кривой, показанной на рис. 7 производные равны нулю.

Из задачи можно убрать «физику», оставив только «математику», точнее элементарный функциональный анализ. Для этого переменные  $m$ ,  $g$  и  $r$  нужно сделать безразмерными и присвоить им единичные значения<sup>3</sup> – см. рис. 8. Получится довольно простая функциональная зависимость, которую можно анализировать методами символьной, а не численной математики и находить выражения для точек минимума, максимума и точки перегиба. А для начала можно построить семейство кривых с абсциссой  $h$  при разных значениях  $k$ .

На графиках можно показать изолинии локального максимума (первой метастабильной точки) и точки перегиба (вторая метастабильная точка). Первая изолиния при увеличении значения  $k$  будет приближаться к единице (левый край графика), а вторая к правому краю графика – к максимальному значению  $h$ , равному корню из трех плюс единица.

<sup>3</sup> Присвоение радиусу и массе единичных значений не вызывает вопросов (см. также сноску 2). Но вот единица для ускорения свободного падения может кого-то смутить. Поясняем! Физическая первооснова метра – это длина маятника, период колебания которого равен двум секундам [2]. Но можно было задать метр и так: метр – это такое расстояние, при котором ускорение свободного падения равно одному метру, деленному на секунду в квадрате. В школах, кстати, на уроках физики для облегчения расчетов рекомендуют округлять  $g$  до 10. Мы тоже можем в нашем преобразовании на рис. 8 переменной  $g$  присвоить десятку, а не единицу. В «хвостике» итогового выражения  $h - 1$  замениться на  $10h - 10$ , но характер извивов кривых это не поменяет.

$$PE(h, k) := \left\{ \begin{array}{l} m \leftarrow 1 \\ \mathbf{g} \leftarrow 1 \\ r \leftarrow 1 \\ PE_D \leftarrow m \cdot \mathbf{g} \cdot (h - r) \\ PE_B \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} l \leftarrow \sqrt{(2r)^2 - (h-r)^2} \\ L \leftarrow 2(l + \pi \cdot r + 2r) \\ \Delta L \leftarrow L - 2r \cdot (3 + \pi) \\ k \cdot \frac{\Delta L^2}{2} \end{array} \right. \\ PE_D + PE_B \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{k \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{4 + (h-1)^2} - 2 \right)^2}{2} + h - 1$$

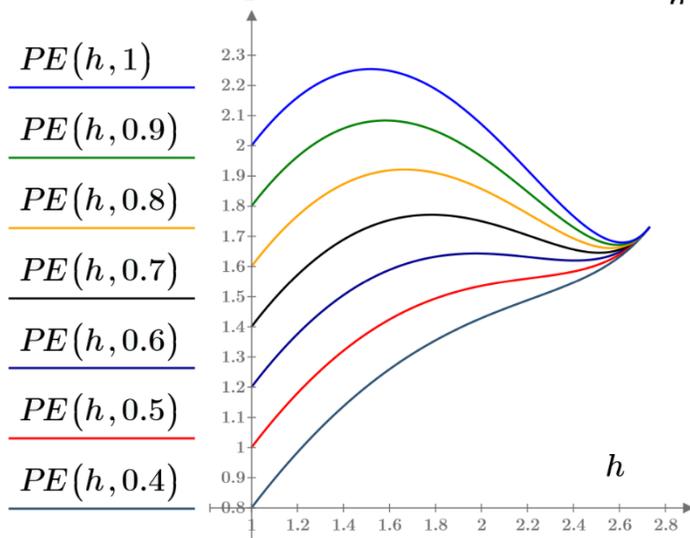
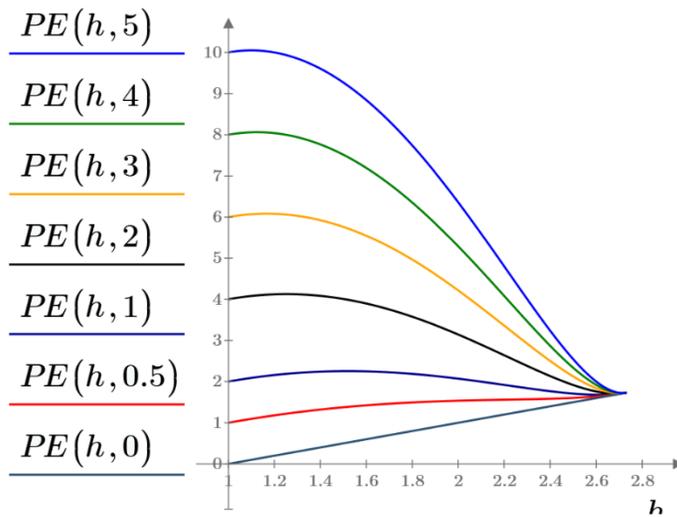


Рис. 8. Упрощение функции потенциальной энергии с графическим анализом семейства кривых

Задача, описанная в статье, хороша тем, что её несложно отобразить на простом физическом опыте – см. рис. 9, где показаны три фотографии алюминиевых банок, стянутыми резинками – одной, двумя и тремя.

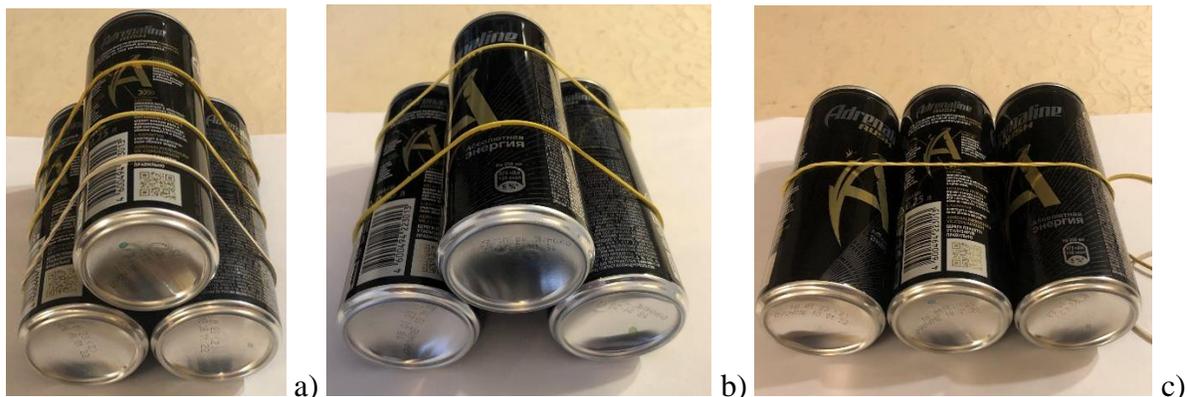


Рис. 9. Фотографии трех банок, отображающими три вышеописанные стабильные случая стягивания резинкой окружностей: а) три резинки (см. рис. 1), б) две резинки (см. рис. 3), с) одна резинка (см. рис. 2)

Если банки, резинки и поверхность стола хорошо смазать маслом, то можно постараться получить вышеописанный маятник (осциллятор). При этом неплохо бы сделать так, чтобы резинки находились в неких круговых желобках банок и не соприкасались с поверхностью стола.

Полушутливая ремарка. В банках на рис. 9 хранятся не простые напитки, а энергетические – это так называемые энергетика. На банках видна надпись (слоган) «Абсолютная энергия». Можно предположить, что в первой банке хранится «абсолютная» кинетическая энергия, во второй – «абсолютная» потенциальная энергия приподнятой средней банки, а в третьей – «абсолютная» потенциальная энергия растянутой резинки. Шутки шутками, но при колебании нашего маятника эти энергии будут переходить из одной формы в другую, но их сумма должна оставаться постоянной. Это без учета потери энергии на трение. Постоянство суммы энергий или плавное уменьшение этой суммы – это один из критериев правильности созданной математической модели нашего нового маятника.

Можно взять более трех цилиндров, стянуть их резинкой и посмотреть, как будет вести себя эта связка, если её положить на стол.

А теперь давайте поднимемся к началу статьи – к эпиграфу!

Нашу задачу можно перевести из плоскости в объем: взять не три цилиндра, а четыре или пять «гладкоповерхностных» шаров (рис. 10) и обтянуть их не резинкой, а эластичной пленкой. Пленка пусть будет прозрачной, а лучше совсем невидимой.

Если пленка будет достаточно жесткой, то шары выстроятся в пирамиду, показанную на рис. 10 (см. также рис. 1). Если же пленка будет достаточно эластичной, то красный шар опустится на стол, раздвинув белые шары (см. рис. 2). Следует ожидать, что при определенной промежуточной эластичности пленки вся эта объемная конструкция поведет себя как маятник. Здесь, правда, нужно будет принять меры, чтобы белые шары, лежащие на столе, раздвигались строго на четыре стороны Света. Для этого нужно будет сделать так,

чтобы белые шары катались в неких желобках, проделанных на поверхности стола в виде креста.

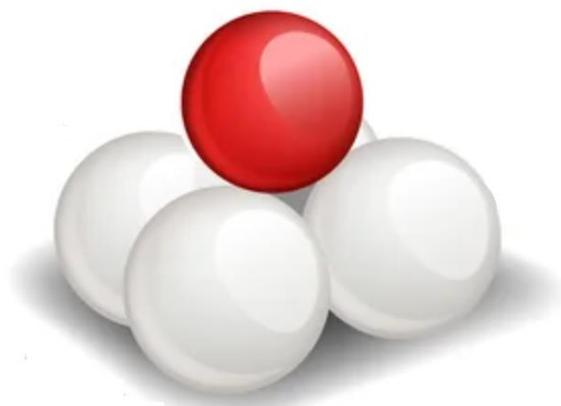


Рис. 10. Пять шаров в прозрачной пленке

Кроме того, можно исследовать систему с разными радиусами окружностей и шаров.

Упругость резинки и пленки сильно зависит от температуры. Нагревая или охлаждая наши цилиндры и шары, стянутые резинкой или пленкой, можно получить все вышеописанные случаи.

Можно составить дифференциальное уравнение, решение которого даст периодические функции изменения положения центра среднего цилиндра во времени. Без учета сил трения это сделать довольно просто. Но во что выльется учет трения!?

Эту работу мы поручаем читателям.

Обсуждение данной задачи, приведшей к идее нового маятника, можно посмотреть здесь [5]. Выражаем признательность участникам этой дискуссии. Там же можно посмотреть и анимации колебания нашего нового маятника (осциллятора), а также скачать соответствующие расчетные файлы.

Литература и ссылки:

1. Очков В. Ф., Тихонов А. И. и 7 студентов МЭИ. Математика и новые информационные технологии // Математическое образование. № 1, 2021 (<http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Geometry-IT.pdf>)
2. В. Ф. Очков, В. Л. Чудов, К. Писасич, Н. Г. Герасимов, Е. В. Никульчев. Три нелинейности маятника, или Улыбка фазового портрета // Cloud of Science. 2020. Т. 7 С. 6–39 (<http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Pendulum.pdf>)
3. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике: Учебное пособие для вузов / Под ред. Е. С. Пятницкого. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 264 с. ([https://www.studmed.ru/gantmaher-fr-lekcii-ro-analiticheskoy-mehanike\\_98f223dc7f3.html](https://www.studmed.ru/gantmaher-fr-lekcii-ro-analiticheskoy-mehanike_98f223dc7f3.html))
4. Очков В.Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. Издательство Лань. 2018 (<http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf>)
5. <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/New-problem-with-circles/td-p/780229>