Сказка о зайце и геометрической оптике

В.Ф. Очков, д.т.н., профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ»; ochkovvf@mpei.ru	**V.F. Ochkov**, DrSci (Technical Sciences), Professor, National Research University "MPEI"; ochkovvf@mpei.ru
Ключевые слова: геометрическая оптика, принцип Ферма, Mathcad, минимизация, закон Снелла	*Keywords*: geometric optics, Fermat's principle, Mathcad, minimization, Snell's law
В статье рассказано о том, как можно использовать инструменты минимизации математической программы Mathcad для решения задачи геометрической оптики и визуализации решения.	The article describes how you can use the minimization tools of the mathematical program Mathcad to solve the problem of geometric optics and visualize the solution.

«– Ату его, — послышался в это время протяжный крик одного из остановившихся борзятников. Он стоял на полубугре жнивья, подняв арапник, и еще раз повторил протяжно: — А-ту — его!»

Лев Толстой «Война и мир»

А на кого кричал борзятник (псарь, смотрящий за борзыми собаками) из эпиграфа? Он кричал и показывал арапником (плеткой для собак) на зайца, который, услышав этот крик, побежал во всю прыть через поле к лесу, где он может спастись от преследующих его собак. В чистом поле это сделать практически невозможно.

Но заяц у нас не простой, а имеющий смартфон с навигатором и калькулятором…

Итак, зайцу нужно как можно быстрее спрятаться в лесу от собак. Заяц со скоростью v начинает бег на краю поля из точки 0 (см. рис. 4), за которым внизу находится спасительный лес (точка 3), расстояние до которого равно Δ (ширина поля). Хитрый заяц бежит не прямо к лесу, а наискосок к круглому участку (точка 1), находящемуся посреди поля. Это может быть, к примеру, вертолетная площадка сельхозавиации с гладкой бетонной поверхностью, где заяц может бежать в два раза быстрее со скоростью v_r. Заяц в точке 1 резко изменяет направление бега, пересекает по хорде круглый участок, выбегает из него с еще одной сменой направления (точка 2) и по кратчайшему пути финиширует в лесу (точка 3). Определить траекторию бега зайца – координаты точек 1 и 2, при которых время бега будет минимальным. Точка начала координат находится в центре круга.

На рисунке 1 показано начало решения этой задачи в среде физико-математической программы Mathcad. На первой строке вводятся исходные данные (включая абсциссу нулевой точки x_0) и рассчитываются ординаты нулевой (y_0) и третьей (y_3) точек. На второй строке вводится в расчет *целевая функция* с именем *Time* и с четырьмя аргументами – с абсциссами и ординатами первой и второй точек. Целевой эта функция называется потому, что цель нашего расчета – это нахождение минимума этой функции.

Встроенная в Mathcad функция **Minimize**, опираясь на начальное приближение для аргументов пользовательской функции *Time*, вернула значение координат первой и второй точек, при котором время бега от нулевой до третьей точки (начало и конец поля) будет минимальным. В задаче есть ограничения – точки 1 и 2 находятся на окружности радиусом *r*, центр которой расположен в начале координат. Поэтому задача решается с привлечением блока Решить с тремя областями – начальные приближения, ограничения и решатель.

$$\Delta := 4\ m \quad r := 1\ m \quad v := 1\ \frac{m}{s} \quad v_r := 2\ \frac{m}{s} \quad x_0 := -1.556\ m \quad y_0 := \frac{\Delta}{2} \quad y_3 := -\frac{\Delta}{2}$$

$$Time(x_1, y_1, x_2, y_2) := \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{v} + \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{v_r} + \frac{\frac{\Delta}{2} + y_2}{v}$$

Решить

Начальные приближения

$$x_1 := \frac{r}{2} \qquad y_1 := \frac{r}{2} \qquad x_2 := x_1 \qquad y_2 := -y_1$$

Ограничения

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \qquad x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} := \mathbf{Minimize}(Time, x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{bmatrix} -0.731 \\ 0.683 \\ -0.257 \\ -0.966 \end{bmatrix} m$$

Рис. 1. Решение задачи о беге зайца по полю с вертолетной площадкой посередине (вариант 1)

Ограничения, показанные на рис. 1, несложно перенести в целевую функцию – см. рис. 2. Это, во-первых, позволит избавится от громоздкого блока Решить, а во-вторых, оставит у целевой функции всего два аргумента – абсциссы точек 1 и 2. Ординаты этих точек подсчитываются дополнительно после вызова функции **Minimize**.

$$Time(x_1, x_2) := \left\| \begin{array}{l} y_1 \leftarrow \sqrt{r^2 - x_1^2} \\ y_2 \leftarrow -\sqrt{r^2 - x_2^2} \\ \dfrac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{v} + \dfrac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{v_r} + \dfrac{\dfrac{\Delta}{2} + y_2}{v} \end{array} \right.$$

$$x_1 := -1\ \mathbf{m} \qquad x_2 := -1\ \mathbf{m} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \mathbf{Minimize}(Time, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -0.731 \\ -0.257 \end{bmatrix} \mathbf{m}$$

$$y_1 := \sqrt{r^2 - x_1^2} = 0.683\ \mathbf{m} \qquad y_2 := -\sqrt{r^2 - x_2^2} = -0.966\ \mathbf{m}$$

Рис. 2. Решение задачи о беге зайца по полю с вертолетной площадкой посередине (вариант 2)

Если у функции *Time* осталось два аргумента, то её можно отобразить графически контурным графиком – см. рис. 3, на котором видна найденная нами точка минимума в окружении линий одного уровня. Значения функции *Time* на этих линиях показаны под контурным графиком.

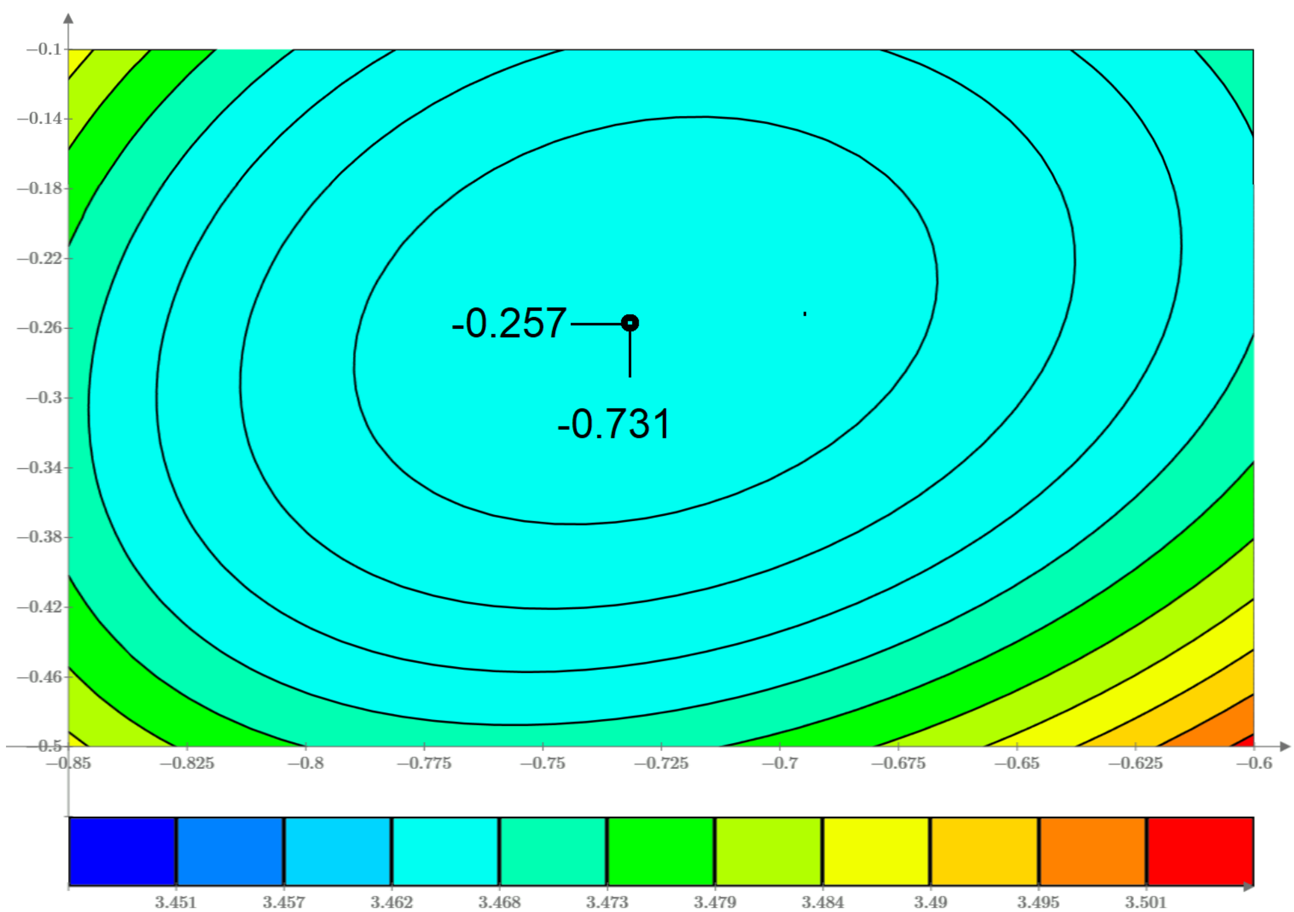

Рис. 3. Контурный график целевой функции задачи о беге зайца

График на рис. 3 можно трактовать и так – это поле, по которому бежит наш заяц с разной скоростью, значение которой отмечено контурным графиком. Можно при желании рассчитать траекторию бега зайца по такому полю (это будет уже не ломанная линия, состоящая из отрезков прямых линий), а кривая линия. Но мы пока ограничимся одной круглой контурной линией (рис. 4), на которой скорость зайца меняется скачком с одного до двух метров в секунду.

На рисунке 4 решение, показанное на рис. 2 и 3, отображено графически. Кроме окружности с радиусом r и пунктирной траектории бега зайца, прочерчены две сплошные прямые линии (лучи), выходящие из центра круга пронизывающие и точки 1 и 2. Подсчитаны значения углов… падения и преломления луча света, исходящего из точки 0 или из точки 3.

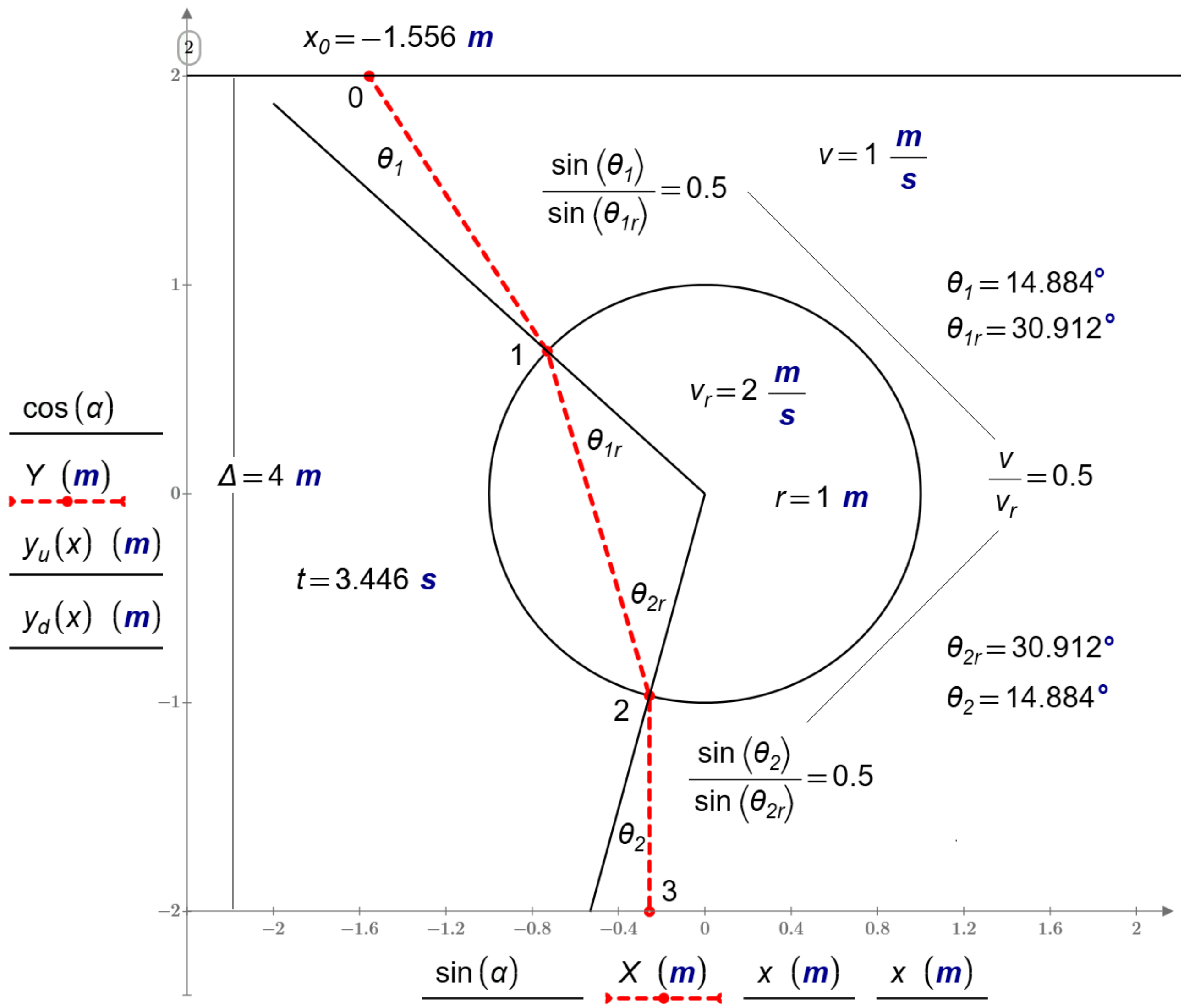

Рис. 4. Заяц бежит из точки 0 в точку 3 через поле с круглой площадкой.

Да-да! Наш заяц – это фактически луч света (фотон света!), который, согласно принципу Ферма, перемещается из одной точки в другую за минимальное время (таутохронизм). А подсчет отношения синусов углов падения и преломления, равный отношению скоростей зайца, пардон, света в разных средах позволяет нам вспомнить о законе геометрической оптики – о законе преломления Снелла. Если углы падения и преломления луча света достаточно малы (меньше семи градусов), то от синусов можно отказаться и работать с самими углами. Это существенно упрощает расчеты в области геометрической оптики. Но переход от ручных к компьютерным расчетам делает такое упрощение излишним.

Кстати, если точку 0 на рис. 4 передвинуть немного влево, то время бега зайца по ломанной кривой, проходящей через окружность, окажется больше четырех секунд. В этом случае зайцу нужно будет бежать напрямик через поле к лесу.

Искривление луча света в атмосфере Земли, связанное с тем, что скорость света в воздухе зависит и от температуры воздуха, – это причина возникновения миражей, когда мы видим то, что в принципе видеть не должны. Перевернутый корабль, парящий над морем, или оазис в пустыне…

Описанная задача имеет реальный физический аналог. Мы отлили стеклянную пластину для будущей линзы, внутри которой оказался дефект – пузырь воздуха. Как он будет преломлять свет, идущий сквозь стекло? Скорость света в стекле, как известно, ниже скорости света в воздухе.

Читатель может попробовать рассчитать траекторию бега зайца в случае, когда его скорость в круге меньше скорости бега вне круга – в круге поле не забетонировано, а наоборот перепахано. Мы взяли стеклянный шарик и пропустили через него поток света. Размеры стеклянного и воздушного шариков должны быть намного больше длины волны света. Иначе это уже не геометрическая оптика!

Кстати, о линзах. В статье [1] описано, как по методу, описанному в данной статье, можно легко и просто рассчитывать реальные линзы и зеркала.

Литература

1. В.Ф. Очков, А.В. Соколов, С.Д. Федорович, Л. Мекес. Путешествие от дома в школу по маршруту Ферма, или Второе оптическое свойство гиперболы // Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 4. С. 494-517 (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Optic-Ochkov.pdf)