

Глава 1. Математический анализ в инженерных расчетах

В главе приводится численное, графическое и псевдоаналитическое (приближенное) решение задачи о параметрах замкнутой цепочки (без кулона и кулоном), накинута на горизонтальный цилиндр. Решение сводится к численному поиску корня системы трансцендентных уравнений и к минимизации с ограничениями. Решается задача сглаживания табличных значений аналитической зависимостью, найденной с помощью Интернета. Решается аналитически и численно дифференциальное уравнение цепной линии.

В главе затронуты:

Математика: функция, производная, интеграл, первообразная, длина кривой, центр тяжести кривой, система трансцендентных уравнений, оптимизация с ограничениями, сглаживание табличных зависимостей

Физика: провисающая цепь без и с грузом, потенциальная энергия механической системы

Информатика: работа с функциями пользователя, численное решение трансцендентных уравнений, численная оптимизация с ограничениями, решение задач на сайтах Интернета и на специализированных форумах, сглаживание табличных зависимостей

Сайты с расчетными документами: <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/One-more-catenary/m-p/649328>, <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/What-is-the-better-function-for-this-curve/td-p/651792> и <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Catenary-formula-thru-ODE/td-p/667131>.

1.1. Постановка задачи

Задача (цепочка без кулона): на горизонтальный цилиндр радиусом R накинута замкнутая цепочка длиной L (см. рис. 1.1). Определить форму провисания цепочки, длина которой, естественно, больше длины окружности цилиндра: $L > 2\pi R$.

Эта задача привлекательна тем, что ее можно сформулировать не только словами, но и в реальности, физически. Для этого достаточно прикрепить к доске студенческой аудитории цилиндрический диск (см. рис. 1.1 — там использовался барометр-анероид, оказавшийся под рукой) и накинуть на него замкнутую цепочку. Далее можно сфотографировать все это на цифровую камеру, оцифровать изображение, обработать его на компьютере, а затем сравнить эти данные с теми, какие получатся при математическом моделировании провисания цепочки: сравнить, как сейчас стали говорить, реальный объект

Глава 1

с его цифровым двойником. Это будет интересная лабораторная работа по образовательной технологии STEM на стыке математики, физики, теоретической механики, статистики и, естественно, информатики.

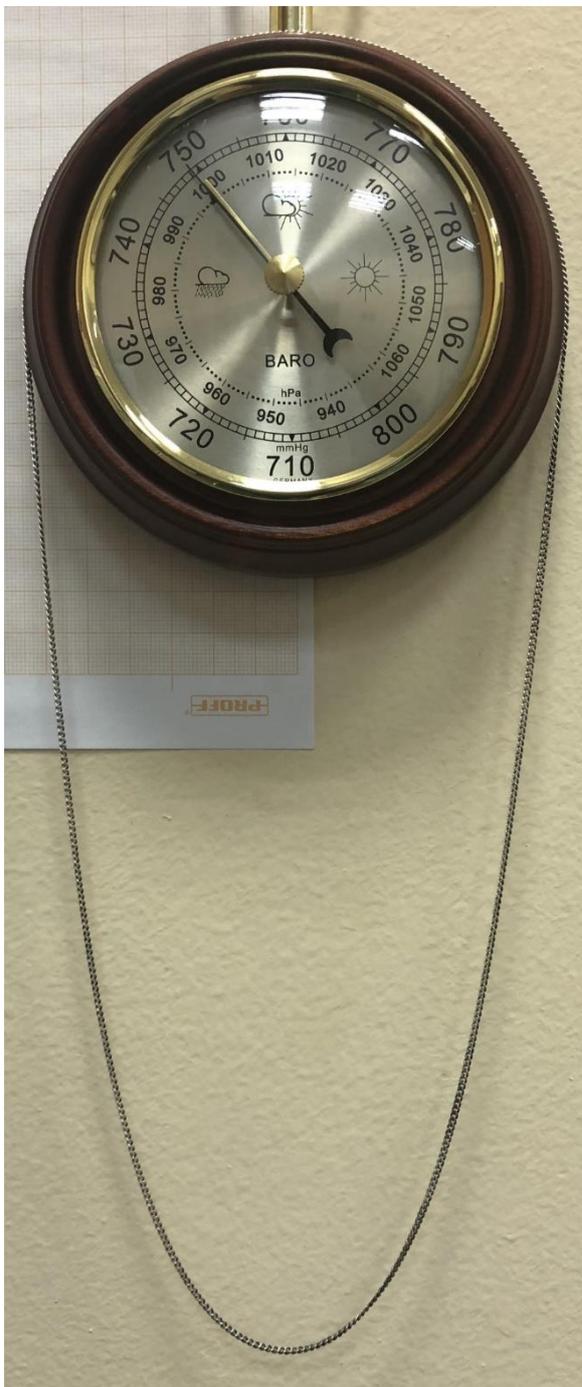


Рис. 1.1. Цепочка, накинутая на круглый настенный барометр-анероид

На рисунке 1.2 показана схема задачи с буквенными обозначениями. В качестве начала координат выбрана точка с нулевой абсциссой, отстоящая от центра окружности вниз на расстоянии h . Это искомая величина задачи наряду с двумя другими величинами (x_0 и a — см. рис. 1.2 и описание ниже), будет объектом поиска. Важной характеристикой будет также и угол θ , при котором цепочка отрывается от цилиндра.

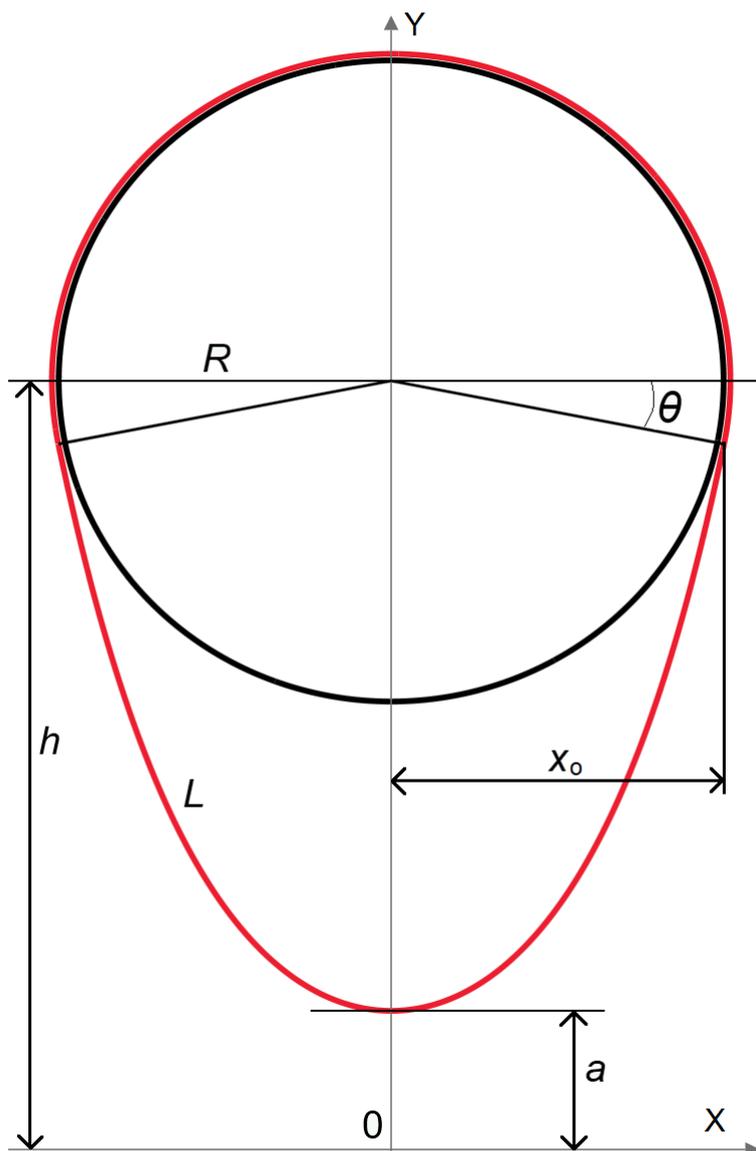


Рис. 1.2. Схема задачи о цепочке на цилиндре

Большинство людей, если их спросить, по какой кривой провисает цепь, ответят, что это скорее всего парабола. И тут нет ничего удивительного. Даже великий Галилей так считал. Потом, правда, он признался, что ошибался. Цепь, а если говорить более точно, гибкая однородная нерастяжимая тяжёлая нить при провисании приобретает форму *цепной линии* (a catenary, по-английски). Формулу цепной линии, включающей в себя гиперболический косинус, которую мы будем использовать ниже в расчете, открыли почти одновременно и независимо друг от друга Лейбниц, Гюйгенс и Иоганн Бернулли. Это было сделано посредством аналитического решения дифференциального уравнения провисания цепи. Ниже приведено данное дифференциальное уравнение и его вывод, а также его аналитическое и численное решение. Это все несложно найти в Интернете по ключу «Дифференциальное уравнение провисающей цепи», например. Очень много ресурсов посвящено этой физико-математической задаче. Наиболее интересный и понятный по

Глава 1

мнению авторов находится на сайте www.math24.ru. Воспроизведем это решение в средах пакетов Mathcad и Maple.

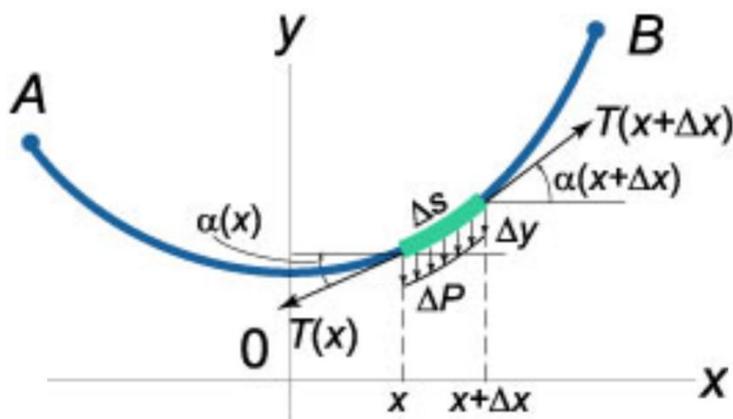


Рис. 1.3. Схема задачи о провисающей цепочке (силы натяжения $T(x)$ и $T(x+\Delta x)$ в точках x и $x+\Delta x$)

Из схемы задачи, показанной на рис. 1.3, можно вывести уравнения равновесия произвольного малого элемента цепочки длиной Δs , на который действуют распределенная сила тяжести, равная $g \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta s$, где g – ускорение свободного падения, ρ – плотность материала цепочки, A – площадь поперечного сечения цепочки. На рисунке 1.4 записаны балансы сил, действующих на элемент цепочки в горизонтальном (п. 1) и вертикальном (п. 2) направлениях с опорой на вспомогательную функцию $\alpha(x)$ – угол наклона касательной. Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки является постоянной величиной и равна силе натяжения цепочки в её самой нижней точке $T(0)$, где вертикальная проекция силы натяжения равна нулю (п. 1a). В пункте 2a зафиксирован ключевой момент всего математического анализа: переход от конечной разности Δ к бесконечно малому дифференциалу d , подстановка в уравнение «вертикального» баланса сил, уравнения «горизонтального» баланса сил (п. 2b), появление тангенса вместо синуса, деленного на косинус (п. 2c), замена тангенса на производную (п. 2d) и, наконец, появление самого дифференциального уравнения второго порядка (п. 2e). Это уравнение решается в полуавтоматическом режиме: через понижение его порядка и разделение переменных (п. 3). Затем в пункте 3a в дело вступает символьная математика пакета Mathcad, который решает уравнение с интегралами в правой и левой частях. Решением этого уравнения будет гиперболический синус, первообразная которого – гиперболический косинус (п. End). Это и будет решением нашей задачи о формуле цепной линии. Констант интегрирования мы коснемся ниже.

$$T(x) \cdot \cos(\alpha(x)) = T(x + \Delta x) \cdot \cos(\alpha(x + \Delta x)) = T(0) \quad (1)$$

$$T(x) = \frac{T(0)}{\cos(\alpha(x))} \quad (1 \text{ a})$$

$$T(x) \cdot \sin(\alpha(x)) - T(x + \Delta x) \cdot \sin(\alpha(x + \Delta x)) = g \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta s \quad (2)$$

$$d(T(x) \cdot \sin(\alpha(x))) = g \cdot \rho \cdot A \cdot ds \quad \Delta = d \quad (2 \text{ a})$$

$$d\left(\frac{T(0)}{\cos(\alpha(x))} \cdot \sin(\alpha(x))\right) = g \cdot \rho \cdot A \cdot ds \quad (2 \text{ b})$$

$$d(T(0) \cdot \tan(\alpha(x))) = g \cdot \rho \cdot A \cdot ds \quad \tan(\alpha(x)) = y'(x) \quad (2 \text{ c})$$

$$T(0) \cdot d(y'(\alpha(x))) = g \cdot \rho \cdot A \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (2 \text{ d})$$

$$y''(x) = b \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad b = \frac{g \cdot \rho \cdot A}{T(0)} \quad (2 \text{ e})$$

$$z(x) = y'(x) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \cdot dz = b \cdot dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} dz = \int b dx \xrightarrow{\text{solve, } z} \sinh(b \cdot x) \quad (3 \text{ a})$$

$$y(x) = \int \sinh(b \cdot x) dx \rightarrow y(x) = \frac{\cosh(b \cdot x)}{b} \quad b = \frac{1}{a} \quad (\text{End})$$

Рис. 1.4. Решение задачи о цепной линии в среде Mathcad Prime 5 и ниже.

Решение, приведенное на рис. 1.4, получено в среде Mathcad Prime 5. В среде же Mathcad Prime 6 появился новый символьный «движок», который в каких-то задачах оказался более сильным, а в каких-то – более слабым. Так, например, этот новый «движок» не справился с решением не только интегрального, но и логарифмического уравнения (рис. 1.5). Пришлось этот «движок» толкать – помогать ему в ручном режиме решить поставленную задачу. Для этого, к примеру, пришлось убрать логарифм и ввести экспоненту в решаемом уравнении. В этом решении (рис. 1.5) есть и плюсы, по сравнению с решением, показанном на рис. 1.4: в неупроценном решении видно, что такое гиперболический синус. На сайте www.math24.ru, откуда была взята методика решения задачи, реализованная в среде Mathcad, уравнение на последней строке рис. 1.5, решается вручную.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz = \int \frac{1}{a} dx \xrightarrow{\text{solve, } z} ?$$

Not find solution

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz \rightarrow -\ln(\sqrt{z^2+1}-z) \quad \int \frac{1}{a} dx \rightarrow \frac{x}{a}$$

$$-\ln(\sqrt{z^2+1}-z) = \frac{x}{a} \xrightarrow{\text{solve, } z} ?$$

Not find solution

$$z - \sqrt{1+z^2} = e^{\frac{x}{a}} \xrightarrow{\text{solve, } z} \frac{e^{-\frac{x}{a}} \cdot \left(e^{\frac{2 \cdot x}{a}} - 1 \right)}{2} \xrightarrow{\text{simplify}} \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Рис. 1.5. Решение задачи о цепной линии в среде Mathcad Prime 6 и выше.

Примечание. Решения, показанные на рисунках 1.4 и 1.5 отличаются и тем, что на рисунке 1.4 мы используем константу b , а на рисунке 1.5 её обратную величину с именем a . Сложилось так, что цепная линия вошла в математику с параметром a (размерность длины), а не b (размерность длины в минус первой степени). Формулу с параметром a мы и будем использовать в дальнейших выкладках этой главы учебника.

Пакет Mathcad не имеет средств аналитического решения дифференциальных уравнений. Поэтому-то мы на рисунках 1.4 и 1.5 решали такое уравнение в полуавтоматическом режиме через разделение переменных, понижение порядка уравнения и интегрирование. Средствами аналитического решения дифференциальных уравнений оборудован пакет Maple – см. рис. 1.6.

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}(y(x)) = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(y(x))\right)^2}$$

$$ode := \frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}}{a}$$

dsolve(ode)

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{-C1 + x}{a}\right) + _C2$$

Рис. 1.6. Решение задачи о цепной линии в среде Maple

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на рис. 1.6 решено в общем виде без указания начальных условий. Поэтому в ответе оказались две константы интегрирования *_C1* и *_C2*, которые мы упустили в решениях на рисунках 1.4 и 1.5. У этих констант есть геометрический смысл, который мы будем использовать в наших расчетах (см. рис. 1.19 ниже) когда будем менять начало координат.

Пакет Mathcad имеет инструменты численного решения дифференциальных уравнений. На рисунке 1.7 показано решение дифференциального уравнения цепной линии, выведенное ранее – см. рис. 1.4, пункт 2е. Решается задача с начальными условиями (задача Коши): цепная линия имеет минимум в точке $x = 0, y = a$. На интервале $0 - t_e$ по умолчанию отмечается тысяча точек, в которых рассчитываются значения искомой функции. Эта функция затем отображается графически и сравнивается с функцией, найденной аналитическим путем (пунктир).

Решить $a := 0.5 \text{ m}$ $t_e := 2 \text{ m}$

Решатель Ограничения

$$y(0 \text{ m}) = a \quad y'(0) = 0 \frac{\text{m}}{\text{m}} \quad a \cdot y''(x) = \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

$$y := \text{Odesolve}(y(x), t_e)$$

$$y_a(x) := a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad x := 0 \text{ m}, 1 \text{ cm} \dots t_e$$

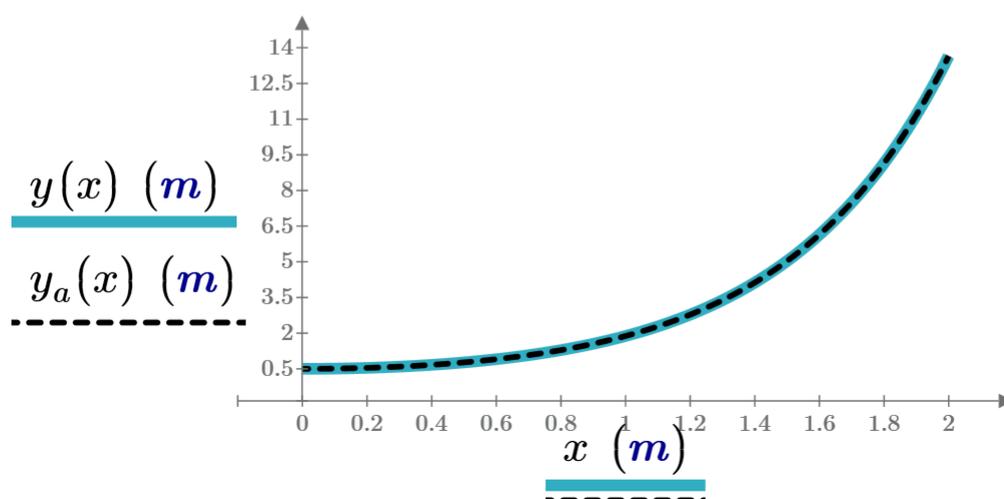


Рис. 1.7. Численное решение задачи о цепной линии в среде Mathcad и сравнение его с аналитическим решением

Вернемся к общему решению дифференциального уравнения цепной линии, показанному на рис. 1.6 и имеющему две константы интегрирования $_C1$ и $_C2$. Их суть легко понять, если решить такую задачу: цепь с заданной длиной L зафиксирована на концах в двух заданных точках; найти коэффициенты уравнение кривой цепной. Для решения этой задачи, сводящейся к решению трех трансцендентных уравнений, придется отказаться от канонического вида уравнения цепной линии с одним параметром a и использовать неканоническое уравнение с уже тремя параметрами. Два дополнительных параметра – это и есть упомянутые константы интегрирования. Решение данной задачи показано на рис. 1.8.

Глава 1

$$y(x, a, x_h, h) := a \cdot \cosh\left(\frac{x - x_h}{a}\right) - a + h$$

$$x_L := -2 \text{ m} \quad y_L := 3 \text{ m}$$

$$x_R := 5 \text{ m} \quad y_R := 5 \text{ m}$$

$$L_{min} := \sqrt{(x_L - x_R)^2 + (y_L - y_R)^2} = 7.28 \text{ m}$$

$$L := 10 \text{ m}$$

Начальные приближения

Решить

$$a := 1 \text{ m} \quad x_h := 1 \text{ m} \quad h := 1 \text{ m}$$

$$y_L = y(x_L, a, x_h, h)$$

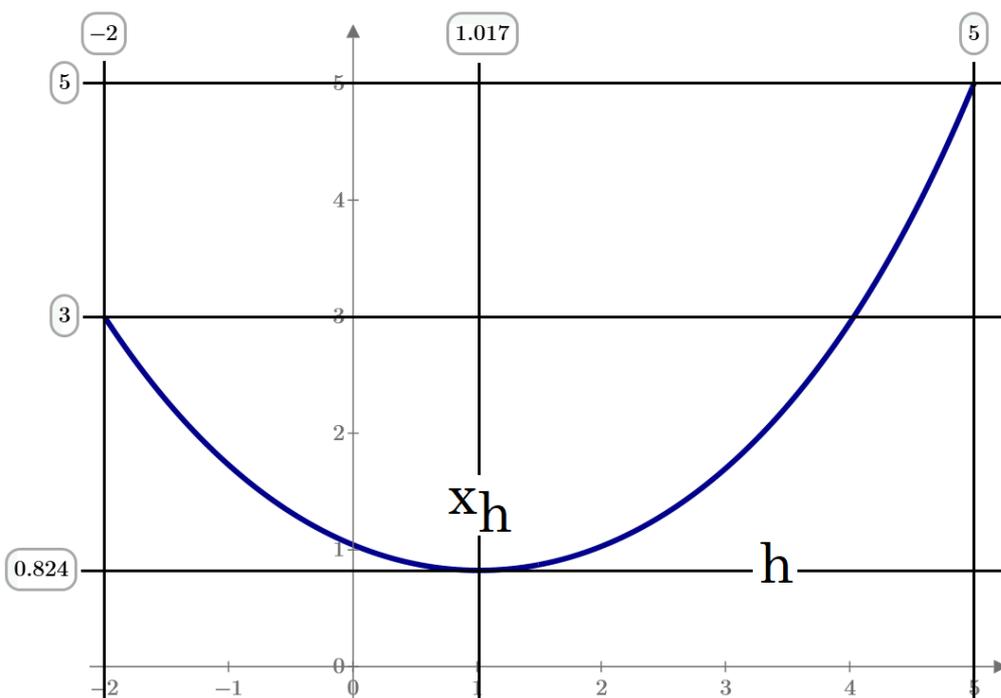
$$y_R = y(x_R, a, x_h, h)$$

Ограничения

$$L = \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x, a, x_h, h)\right)^2} dx$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} a \\ x_h \\ h \end{bmatrix} := \text{Find}(a, x_h, h) = \begin{bmatrix} 2.385 \\ 1.017 \\ 0.824 \end{bmatrix} \text{ m}$$



Глава 1

Рис. 1.8. Численное решение задачи о провисании цепи заданной длины, подвешенной в двух заданных точках

Первым оператором на рис. 1.8 задается функция пользователя – уравнение цепной линии с одним аргументом x и с тремя параметрами a , x_h и h . Два последних параметра – это координаты точки минимума цепной линии. В каноническом уравнении цепной линии они равны нулю. Далее задаются координаты крепления цепочки, рассчитывается ее минимальная длина – расстояние между точками крепления, и задается длина цепочки L . Далее в блоке Решить задаются начальные приближения к решению, записываются уравнения и вызывается функция Find, которая возвращает значения неизвестных системы, превращающих их в почти тождества. А решений у этой системы трех уравнений два. Если в качестве первого приближения для неизвестной с именем a взять отрицательное значение, то провисающая цепь превратится в... арку (рис. 1.9). И это непростая арка, а арка, на элементы которой действуют только силы сжатия, а сил излома нет.

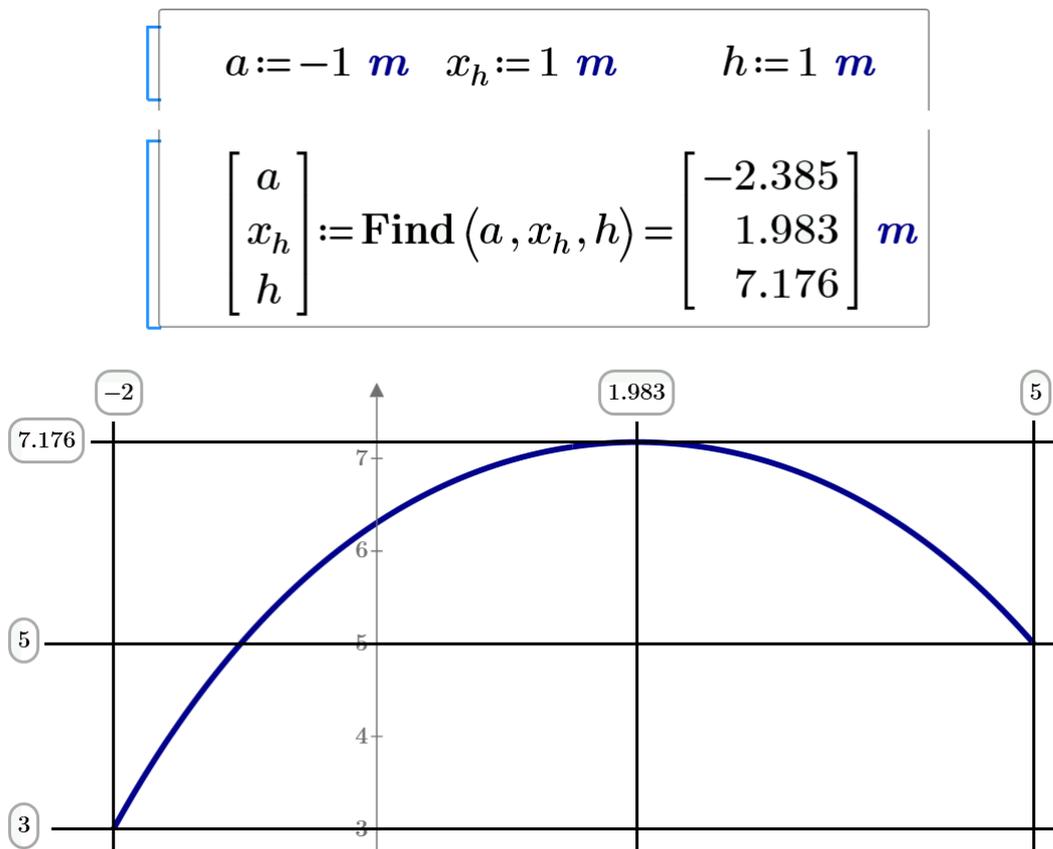


Рис. 1.9. Численное решение задачи об арке заданной длины, упертой в две заданные точки

Ключевой элемент решения на рис. 1.8 – это формула длины кривой с определенным интегралом. Ранее (рис. 1.4 и 1.5) мы работали с неопределенными интегралами. Это формула в ее зародыше присутствовала при выводе формулы цепной линии – см. пункт 2d

на рис. 1.4. Об упрощении этой формулы применительно к цепной линии мы расскажем ниже.

1.2. Численное решение задачи о цепном овале

На рисунке 1.10 показан ввод в среде пакета Mathcad Prime шести *функций пользователя*, необходимых для решения задачи. Для этого используются три уже вышеупомянутых встроенных в Mathcad функций: \cosh (гиперболический косинус), \sinh (гиперболический синус) и acos (арккосинус). Написание и отладка функций пользователя — это, как считают многие программисты, уже наполовину решенная задача!

$$F_c(x, a) := a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{Формула цепной линии}$$

$$F'_c(x, a) := \frac{d}{dx} F_c(x, a) \rightarrow \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{Производная цепной линии}$$

$$S_c(x_o, a) := \int_{-x_o}^{x_o} \sqrt{1 + F'_c(x, a)^2} dx \quad \text{Длина цепной линии от } -x_o \text{ до } x_o$$

$$F_o(x, R, h) := h - \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{Формула нижней полуокружности}$$

$$F'_o(x, R) := \frac{d}{dx} F_o(x, R, h) \rightarrow \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad \text{Производная нижней полуокружности}$$

$$S_o(x_o, R) := R \cdot \left(\pi + 2 \operatorname{acos}\left(\frac{x_o}{R}\right) \right) \quad \text{Длина части цепочки, лежащей на цилиндре}$$

Рис. 1.10. Вспомогательные функции задачи о цепочке на цилиндре

Каноническая формула цепной линии (мы её вывели выше) такая $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Она имеет минимум (провисающая цепь: $a > 0$) или максимум (арка: $a < 0$) в точке с абсциссой, равной нулю и ординатой, равной a (см. рис. 1.11). Значение этого параметра цепной линии, повторяем, нужно будет найти в процессе наших расчетов. Величина a (что в нее входит – см. рис. 1.4) это и некая «крутизна» цепной линии: если a стремится к нулю, то к нулю стремится кривизна цепочки и она превращается в натянутую струну. Еще одна

Глава 1

неизвестная — это переменная x_0 : абсцисса точки отрыва цепочки от цилиндра (см. рис. 1.2). Таких точек две, но они симметричны относительно оси ординат.

$$y(x, a) := a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

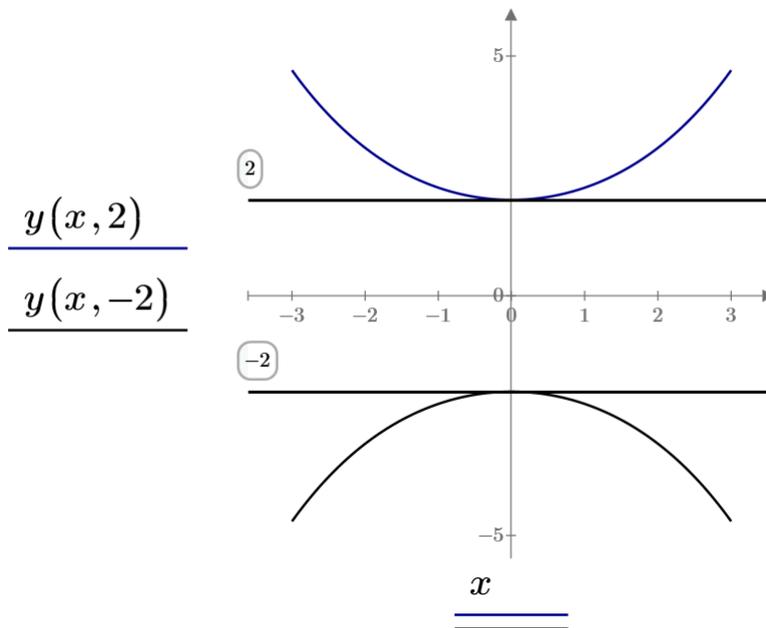


Рис. 1.11. Семейство цепных линий (см. также рис. 1.8 и 1.9)

Формулу с определенным интегралом, задающую длину цепной линии от минус x_0 до x_0 , можно упростить через нахождение первообразной. Такие преобразования сейчас все чаще и чаще проводят не на бумаге и не в уме, а в... Интернете — см. рис. 1.12.

https://www.wolframalpha.com 150%

integral sqrt(1+sinh(x/a)^2) dx from -x0 to x0

Input:

$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx$$

$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx$$

Standard computation time exceeded... [Try again with Pro computation time](#)

integral sqrt(1+sinh(x/a)^2) dx

Indefinite integral:

$$\int \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = a \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) \tanh\left(\frac{x}{a}\right)} + \text{constant}$$

Рис. 1.12. Интернет-поиск первообразной функции

Портал WolframАльфа не взял определенный интеграл, вернул исходное выражение и отослал посетителя к платной версии портала (Pro). Но если работать с неопределенным интегралом, то задача будет почти решена — см. последнюю строку на рис. 1.12. После этого достаточно вспомнить основную теорему математического анализа — теорему Ньютона-Лейбница и получить нужную формулу длины нашей цепной линии от минус x_0 до x_0 : $2a \cdot \text{csgn}(x_0/a)$ — см. рис. 1.13, где функция *csgn* — это знак аргумента, а он у нас положительный, поэтому функция *csgn* всегда будет возвращать единицу. Но в нашем расчете мы оставили исходную формулу с определенным интегралом. Во-первых, она более приемлема в плане понимания сути задачи, а во-вторых, мы все равно решаем задачу численно. Отказ от интеграла и переход к упрощенной формуле будет уместен при попытках аналитического решения задачи, а также для ускорения расчетов, что пока не критично.

$$\begin{aligned}
 \text{int}(x, a) &:= a \cdot \sqrt{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \tanh\left(\frac{x}{a}\right) \\
 \text{int}(x_o, a) - \text{int}(-x_o, a) &\xrightarrow{\text{simplify}} \\
 \longrightarrow a \cdot \sinh\left(\frac{x_o}{a}\right) \cdot \text{csgn}\left(\cosh\left(\frac{x_o}{a}\right)\right) &+ a \cdot \sinh\left(\frac{x_o}{a}\right) \cdot \text{csgn}\left(\cosh\left(\frac{x_o}{a}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Рис. 1.13. Упрощение формулы с интегралом

Формула длины цепочки, соприкасающейся с цилиндром, (функция S_o) задается не через определенный интеграл (мы это сделали для цепной линии — см. выше), а проще — через вычисление длины дуги окружности. Но там опять же при желании можно оставить и исходную формулу с определенным интегралом.

На рисунке 1.14 показано продолжение нашего Mathcad-расчета после ввода функций пользователя: ввод исходных данных и расчет такого важного параметра (критерия) задачи как отношение длины окружности цилиндра $2\pi R$, на который цепочка накинута, к длине самой цепочки L . Этот параметр может меняться от нуля (левая и правая части бесконечно длинной цепочки провисают у окружности почти вертикально: $\theta = 0$) до единицы (цепочка становится круглой и плотно облегает цилиндр: $\theta = 90^\circ$).

$$\begin{array}{l}
 R \qquad L \\
 (m) \\
 \hline
 1 \quad 2 \pi \cdot R + 2 \text{ m} \quad 2 \pi \cdot R = 6.283 \text{ m} \quad L = 8.283 \text{ m} \quad \frac{2 \pi \cdot R}{L} = 0.759
 \end{array}$$

Рис. 1.14. Исходные данные задачи о цепочке на цилиндре

На рисунке 1.14 показано, что переменной R (радиус окружности, на которую накинута цепочка) присваивается значение одного метра. Длина цепочки L при этом задается больше длины окружности на два метра. Тут используются не традиционные операторы присваивания $:=$, а относительно новый инструмент Mathcad *таблица* с тремя строками (переменная, единица её измерения и числовое значение или формула) и двумя столбцами.

Решение задачи сводится к численному поиску корня системы трех трансцендентных уравнений. Эта операция в среде Mathcad Prime (блок **Решить**) показана на рис. 1.15: задаются разумные начальные приближения к решению, вводятся ограничения (в нашем случае это уравнения, но там могут быть и *неравенства*) и вызывается встроенная

Глава 1

в Mathcad функция **Find**, которая возвращает численные значения своих аргументов, превращающих уравнения в тождества. Вернее, почти в тождества, когда левые и правые части уравнений отличаются друг от друга на незначительную величину (численные методы решения задач имеют и другое название — приближенные методы). В среде Mathcad за эту точность отвечает встроенная переменная **STOL**, которая по умолчанию равна 0.001.

Уравнения же такие:

- длина замкнутой цепочки L остается постоянной и складывается из двух частей: части, касающейся цилиндр (S_o), и провисающей части (S_c);
- замкнутая линия, повторяющая форму цепочки, висящей на цилиндре, *неразрывна* ($F_o = F_c$ в точке отрыва цепочки от цилиндра);
- эта замкнутая линия также и *гладкая* ($F'_o = F'_c$ в точке отрыва цепочки от цилиндра).

	Решить
Начальные приближения	$\begin{bmatrix} x_o \\ a \\ h \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.9 R \\ 0.5 m \\ 3 m \end{bmatrix}$
Ограничения	$S_o(x_o, R) + S_c(x_o, a) = L$ $F_o(x_o, R, h) = F_c(x_o, a)$ $F'_o(x_o, R) = F'_c(x_o, a)$
Решатель	$\begin{bmatrix} x_o \\ a \\ h \end{bmatrix} := \mathbf{Find}(x_o, a, h) = \begin{bmatrix} 0.9683 \\ 0.46907 \\ 2.12765 \end{bmatrix} m$
	$\theta := \arccos\left(\frac{x_o}{R}\right) = 14.465^\circ$

Рис. 1.15. Численное решение задачи о цепочке на цилиндре

На рисунке 1.16 показаны результаты расчетов — формы цепной линии для трех различных соотношений длины окружности цилиндра, на который цепочка накинута, к длине самой замкнутой цепочки. Расчеты велись для $R = 1\text{ m}$, но к данной задаче можно

Глава 1

применить теорию подобия, и утверждать, что конкретные величины R и L не влияют на форму провисания цепочки — тут важно только их соотношение.

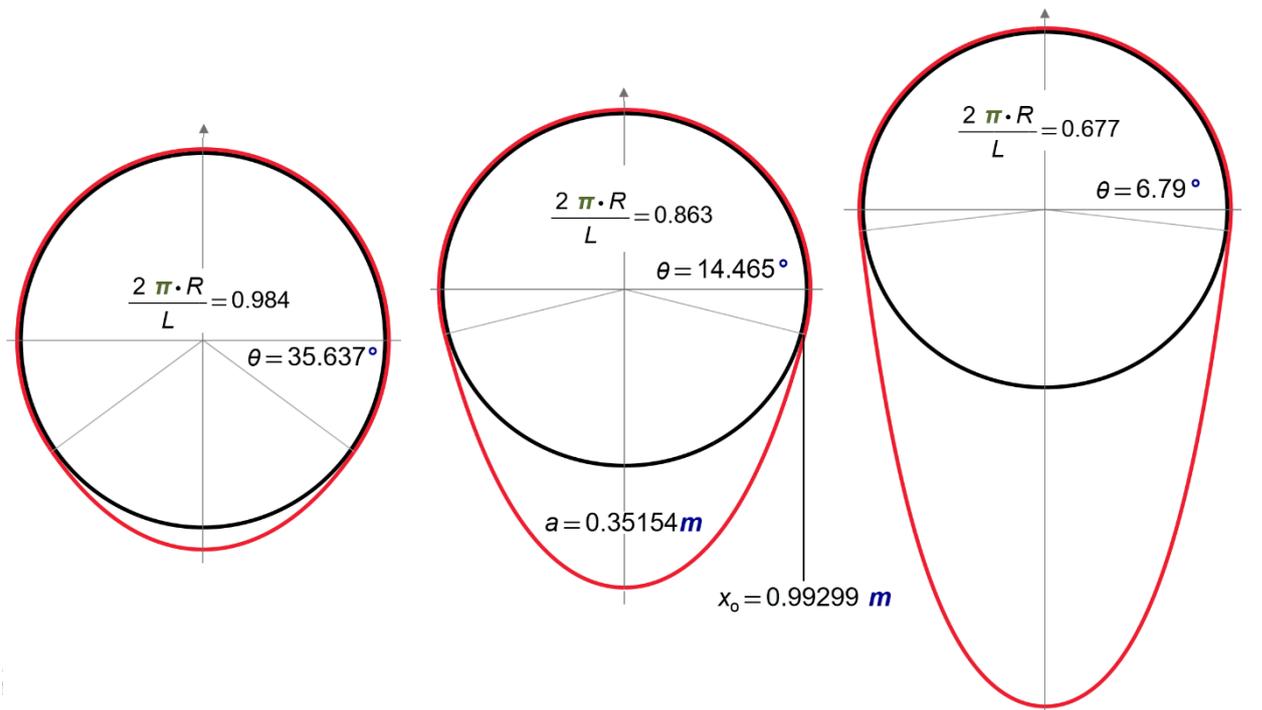


Рис. 1.16. Графическое отображение решения задачи о цепочке на цилиндре

На рисунке 1.16 прорисованы три кривые:

1. Окружность радиусом R и с центром с абсциссой, равной нулю, и ординатой, равной h (см. рис. 1.2). Её можно нарисовать разными путями. Один из них – это построение параметрического графика, где параметр α меняется от нуля до 360 угловых градусов с шагом один градус, а по осям графика прописать выражения $R \sin(\alpha) + h$ (ось Y) и $R \cos(\alpha)$ – ось X .
2. Дуга окружности – часть замкнутой цепочки, лежащей на цилиндре (строится по схеме, описанной выше, но с другим диапазоном изменения параметра параметрического графика).
3. Провисающая часть замкнутой цепочки. Это цепная линия с параметром a , найденным через решение системы уравнений, показанных на рисунке 1.15, и с разбросом аргумента X от минус X_0 до плюс X_0 .

1.3. Нахождение графической зависимости

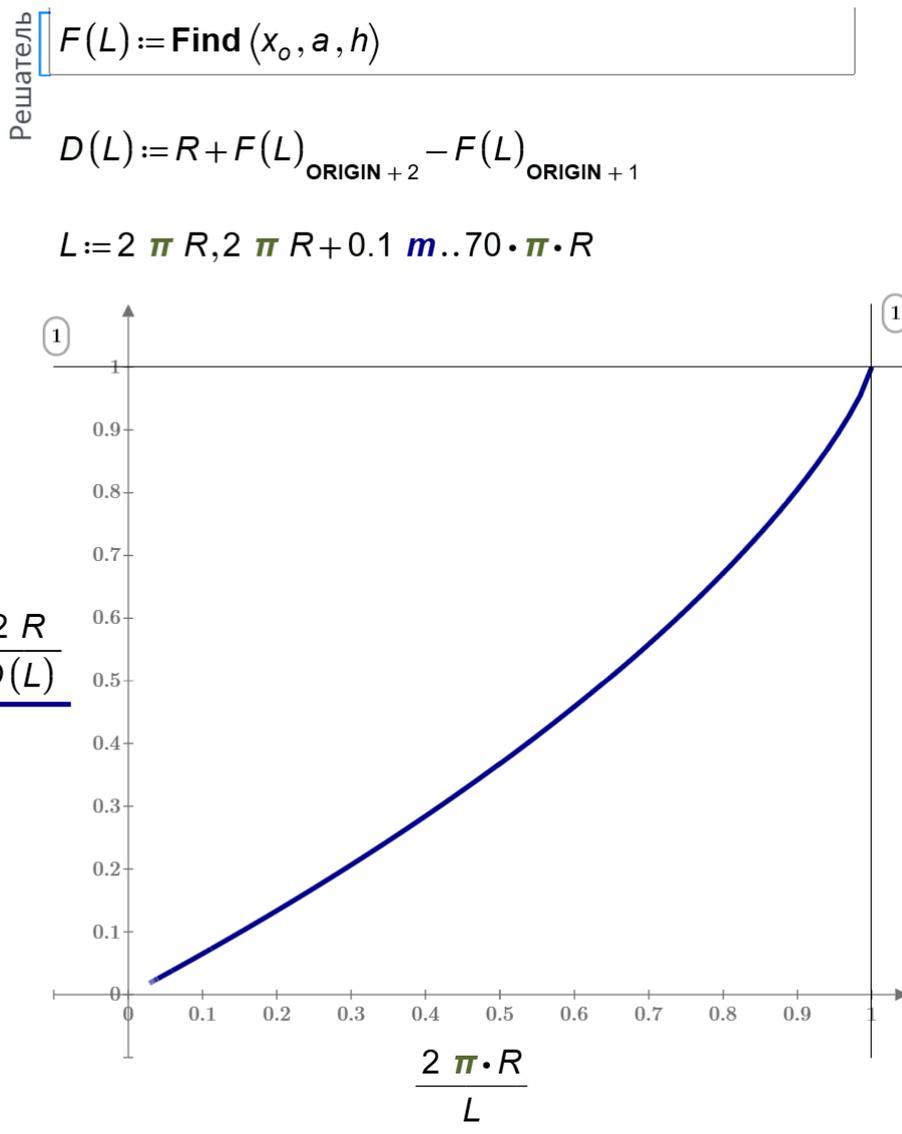
Форма замкнутой цепочки, показанная на рисунке 1.16, в английском языке имеет название *an oval* — любая замкнутая выпуклая кривая. В русском же языке слово *овал* имеет более узкий смысл, являясь неким бытовым синонимом слова *эллипс* («сплюснутая» окружность: овальный стол, овальная клумба, овальное зеркало и т. д.). Если говорить о зеркале, то форма цепочки, показанная в середине рисунка 1.16, хорошо подойдет для

Глава 1

ручного зеркала, в которое смотрится женщина с цепочкой на шее. А женщина эта не простая — она недавно окончила физико-математический факультет университета или пединститута и прихорашивается, чтобы бежать вести семинар по математическому анализу в техническом вузе. Эллипс же, как известно имеет два диаметра — большой и маленький. Наш же *цепной овал* (а так авторы предлагают назвать семейство кривых, показанных на рисунках 1, 1.2 и 1.16) тоже имеет два диаметра — маленький (горизонтальный d , равный $2R$) и большой (вертикальный D , равный $R + h - a$ — см. рис. 1.2). Давайте же свяжем функционально эти три параметра нашей цепной окружности (R , L и D) сначала графически, а потом и аналитически.

Примечание. У эллипса обычно выделяют две полуоси, а не два диаметра (удвоенное значение полуосей), но мы будем работать с диаметрами, что не отразится на результатах.

Функция **Find** в блоке Решить пакета Mathcad способна не только возвращать числовые значения (см. рис. 1.15), но и генерировать функции. Это и поможет нам решить задачу о цепочке на цилиндре *графически* — см. рисунок 1.17.



Вверху рисунка 1.17 показано, какие изменения были внесены в область Решатель блока Решить для создания трех функций, объединенных в вектор-функцию с именем F , первый элемент которой (элемент под номером ORIGIN) — это искомая функция $x_0(L)$, второй (ORIGIN + 1) — искомая функция $a(L)$, а третий (ORIGIN + 2) — искомая функция $h(L)$. Функция же $D(L)$, составленная из двух последних с добавлением радиуса цилиндра, возвращает искомая значение большого диаметра нашего цепного овала в зависимости от длины замкнутой цепочки L . Имея под рукой такую функцию, несложно построить соответствующий безразмерный график — см. рисунок 1.17. Эту кривую можно считать ключевым элементом графического и аналитического решения задачи о замкнутой цепочке, накинута на цилиндр.

1.4. Нахождение аналитической зависимости

Попытки аналитического решения задачи о цепочке на цилиндре пока не увенчались успехом, хотя задача была вывешена на специализированных математических форумах, которые посещают довольно сильные математики.

А для чего, собственно, нужно аналитическое решение задачи? Для того, чтобы иметь набор формул, по которым можно рассчитать параметры провисающей на цилиндре цепочки, не прибегая к сложным вычислительным процедурам — к численному (то есть приближенному) решению системы трансцендентных уравнений (см. рисунок 1.15). Графическое отображение одной из такой формул можно видеть на рис. 1.17. Аналитическое решение в отличие от численного решения подразумевает абсолютную точность. Но в задаче о цепочке на цилиндре она особо не нужна, если учитывать тот факт, что реальная цепочка имеет конкретную толщину, которую мы не учли в расчетах, приведенных выше.

По преданию, когда Колумб рассказывал о том, как он открывал Америку, один из присутствующих сказал: «Что может быть проще, чем открыть новую землю?». В ответ на это Колумб предложил ему простую задачу: как поставить яйцо на стол вертикально? Когда ни один из присутствующих не смог этого сделать, Колумб, взяв яйцо, разбил его с одного конца и поставил на стол, показав, что это действительно было просто (https://en.wikipedia.org/wiki/Egg_of_Columbus). Выражение «Колумбово яйцо» в наше время стало крылатым и означает неожиданно простой и несколько грубоватый выход из затруднительного положения.

Глава 1

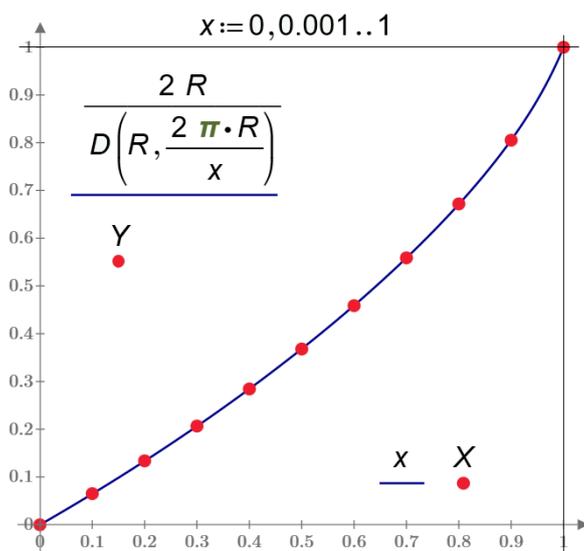
Давайте решим нашу задачу о цепочке на цилиндре по принципу колумбова яйца. Тем более контур цепочки на цилиндре чем-то напоминает контур яйца с острым и тупым концами (была идея назвать этот контур цепным яйцом, но авторы остановились на термине цепной овал — см название главы учебника). Для этого функцию, график которой показан на рис. 1.17, авторы протабулировали, а полученные дискретные данные (векторы X и Y) обработали методом наименьших квадратов (см. рис. 1.18). Но сначала авторы поместили векторы X и Y и график на рис. 1.17 на сайте главы с просьбой подсказать функциональную зависимость, наилучшим способом описывающую точки на графике. Посетитель форума с ником DJF сообщил, что сайт <http://zunzun.com> перебрал почти тысячу формул и указал, что тут лучше всего подходит формула такого вида $a \cdot x / (x - b) + c \cdot x / (x - d)$ и выдал соответствующие численные значения коэффициентов a, b, c и d . На рисунке 1.18 показано, во-первых, проверочный расчет коэффициентов a, b, c и d (использована встроенная в Mathcad функция **genfit** (общее сглаживание), требующая первого приближения — см. третий аргумент-вектор этой функции) и, во вторых, формирование функции с именем D , возвращающей значение большого диаметра нашего цепного овала (цепного яйца), в зависимости от значения его малой полуоси R и длины замкнутой цепочки L . Там же на графике можно видеть точки, по которым велась аппроксимация, и саму сглаживающую кривую, которая достаточно хорошо пронизывает точки, вернее, достаточно хорошо проходит вблизи точек. Нижняя строка на рис. 1.18 — это расчет большого диаметра реального цепного овала, показанного на рис. 1. Прямое его измерение (а для этого и была там заодно сфотографирована миллиметровая бумага) дал ответ 31.4 см, что вполне приемлемо по точности.

$X :=$	$Y :=$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.065199944088442 \\ 0.133903490480971 \\ 0.206736534626063 \\ 0.284450384328171 \\ 0.368027192633584 \\ 0.458837253605707 \\ 0.558952421579763 \\ 0.671910247045333 \\ 0.805288644589493 \\ 1 \end{bmatrix}$	Табуляция функции
		$\frac{2 R}{D\left(\frac{2 \pi \cdot R}{X}\right)}$		

$$f(x, a, b, c, d) := \frac{a \cdot x}{x-b} + \frac{c \cdot x}{x-d}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} := \text{genfit}\left(X, Y, \begin{bmatrix} -0.02 \\ 1.1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, f\right) = \begin{bmatrix} -0.021879015140085 \\ 1.12649150001548 \\ -2.32139584294927 \\ 3.80700632823751 \end{bmatrix}$$

$$D(R, L) := \left\| \begin{array}{l} x \leftarrow \frac{2 \pi \cdot R}{L} \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} -0.021879015140085 \\ 1.12649150001548 \\ -2.32139584294927 \\ 3.80700632823751 \end{bmatrix} \\ \frac{2 R}{\frac{a \cdot x}{x-b} + \frac{c \cdot x}{x-d}} \end{array} \right\|$$



$$D(6 \text{ cm}, 74 \text{ cm}) = 31.9 \text{ cm}$$

Рис. 1.18. Псевдоаналитическое решение задачи о цепочке на цилиндре

Глава 1

У авторов теплилась надежда, что кривая, показанная на рисунке 1.17, является дугой цепной линии. Это было бы красивым решением задачи. Но эти надежды не оправдались и пришлось довольствоваться функцией гиперболического вида (см. рис. 1.18).

Замечание. Обезьяна с очищенным бананом

Один из авторов был свидетелем такой сценки. Посетители зоопарка бросали обезьянам бананы. Обезьяны чистили бананы и съедали их. Один человек решил помочь обезьянам. Он почистил банан и просунул его обезьяне сквозь прутья клетки. Обезьяна начала... по новой чистить этот банан, удивляясь тому, что это у нее не получается.

Так вот, сайту <http://zunzun.com> был брошен... очищенный банан: таблицу данных... цепной функции — данные, функциональная зависимость которой заранее известна. Этот сайт начал «по новой чистить банан» — он выдал множество функциональных зависимостей, среди которых не было... цепной линии.

Функцию пользователя D с двумя аргументами R и L , показанную на рис. 1.18, можно считать *псевдоаналитическим решением задачи* о цепочке на цилиндре. Это решение также можно считать и *колумбовым* — простым и грубым решением.

Но вопрос об *истинноаналитическом* решении задачи остается открытым. Эту работу мы предлагаем провести читателям. Слабо!

Замечание. Длина дуги эллипса

Длина дуги окружности рассчитывается довольно просто — см., например, последнюю формулу на рис. 1.10. Иное дело длина дуги эллипса. Готовой формулы для ее вычисления нет, а есть набор приближенных именных и безымянных формул, псевдоаналитических формул.

1.5. Цепочка с кулоном на цилиндре

Давайте теперь на цепочку, накинутую на цилиндр, нацепим кулон и посмотрим, как она будет провисать. Задачу решим только численно, и поручим читателям найти графическое и (псевдо)аналитическое решения.

В новой задаче у нас будет уже не одна, а две цепных линии, как бы сдвинутых влево и вправо от оси ординат на расстоянии Δx — см. рис. 1.19. При решении данной задачи начало координат перенесено в центр окружности цилиндра. Это явилось причиной появления у функции F_c еще одного дополнительного аргумента h . Без этого изменения не будет работать механизм минимизации, примененной к данной задаче.

$$F_c(x, a, h, \Delta x) := h + a \cdot \cosh\left(\frac{x + \text{if}(x \geq 0, m, \Delta x, -\Delta x)}{a}\right) - a$$

$$F'_c(x, a, \Delta x) := \sinh\left(\frac{x + \text{if}(x \geq 0, m, \Delta x, -\Delta x)}{a}\right)$$

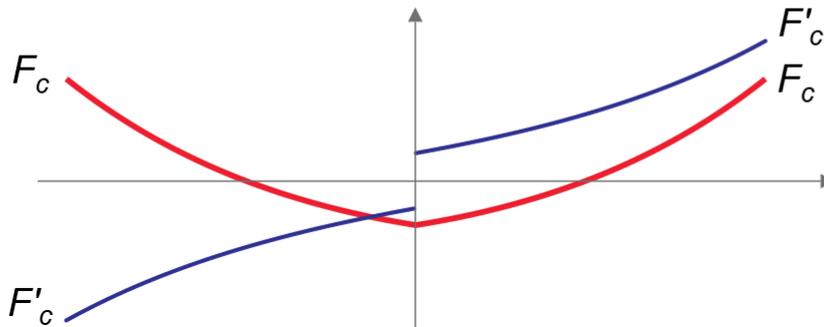


Рис. 1.19. Цепная функция с изломом

Для решения этой задачи к исходным данным нужно добавить еще две константы и две функции пользователя:

- удельную (линейную) массу цепочки m_c ;
- массу кулона m ;
- функцию Y_{cg} , возвращающую ординату центра тяжести цепочки с кулоном (абсцисса этой точки равна нулю, т. к. задача о цепочке с кулоном остается симметричной относительно оси ординат);
- функцию PE , возвращающую *потенциальную энергию* цепочки с кулоном.

На рисунке 1.20 показаны эти две дополнительные функции.

$$Y_{cg}(x_1, x_2, a, h, \Delta x) := \frac{\int_{x_1}^{x_2} F_c(x, a, h, \Delta x) \cdot \sqrt{1 + F'_c(x, a, \Delta x)^2} dx}{S_c(x_1, x_2, a, \Delta x)}$$

$$PE(x, a, h, \Delta x) := g \cdot S_c(-x, x, a, \Delta x) \cdot m_c \cdot Y_{cg}(-x, x, a, h, \Delta x) + g \cdot m \cdot F_c(0, m, a, h, \Delta x)$$

Рис. 1.20. Функции потенциальной энергии цепочки с кулоном

Функция Y_{cg} имеет два аргумента x_1 и x_2 , а не один x (см. рис. 1.10). Такое изменение нацелено на развитие задачи, на решение и ассиметричных задач (см. задания в конце главы учебника).

Глава 1

В задаче о цепочке с кулоном появилась четвертая неизвестная величина Δx (см. рис. 1.19), а уравнений осталось три. Разрешить эту «недоопределенность» (три уравнения с четырьмя неизвестными) можно, заменив функцию **Find**, на функцию **Minimize** — см. рис. 1.21: задача при этом будет сводиться к минимизации потенциальной энергии цепочки с кулоном (принцип Лагранжа-Дирихле). Четвертое необходимое уравнение будет как бы спрятано в функции потенциальной энергии.

Начальные приближения	Решить	
		$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \\ \Delta x \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.95 R \\ 0.7 \text{ m} \\ -3 \text{ m} \\ 0.7 \text{ m} \end{bmatrix} \quad PE(x, a, h, \Delta x) = -1.257 \text{ J}$
Ограничения		
		$S_o(-x, x, R) + S_c(-x, x, a, \Delta x) = L$ $F_o(x, R) = F_c(x, a, h, \Delta x)$ $F'_o(x, R) = F'_c(x, a, \Delta x)$
Решатель		
		$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \\ \Delta x \end{bmatrix} := \text{Minimize}(PE, x, a, h, \Delta x) = \begin{bmatrix} 0.97136 \\ 0.71686 \\ -2.53757 \\ 0.54537 \end{bmatrix} \text{ m}$

$$PE(x, a, h, \Delta x) = -1.063 \text{ J} \quad \alpha := \arccos\left(\frac{x}{R}\right) = 13.746^\circ$$

Рис. 1.21. Решение задачи о цепочке с кулоном на цилиндре

На рисунке 1.22 показано графическое отображение решения задачи цепочке с кулоном, накинутой на цилиндр, при разных значениях массы кулона: 1 кг, 20 грамм и 0 (цепочка без кулона). На рисунке 1.22 можно также видеть пунктир цепной линии — продолжения двух цепных линий, задающих форму цепочки с кулоном. На левом рисунке цепные линии — это почти прямые линии: тяжелый груз вытягивает цепочку в струну. На среднем рисунке видны минимумы цепных линий при $x = -0.632 \text{ m}$ и $x = 0.632 \text{ m}$. Правый же рисунок — это фактически повторение рисунка 1.14, но две цепные линии при этом не слились в одну из-за ограниченной точности численного метода решения задачи. Красная точка под цилиндром — это центр тяжести цепочки с кулоном.

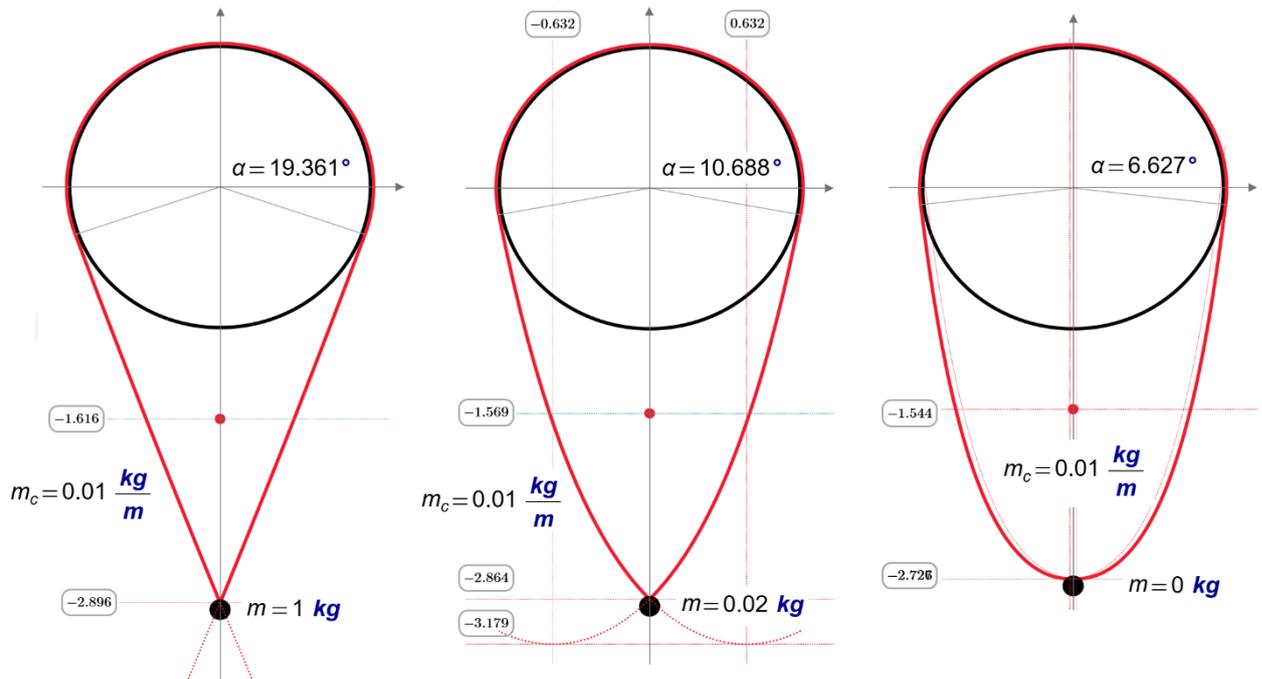


Рис. 1.22. Графическое отображение решения задачи о цепочке с кулоном на цилиндре

Рисунок 1.22 можно интерпретировать и так (слева направо): с воздушного шара сбрасывают балласт, а потом от него совсем отрывается корзина. Тут мы имеем дело уже не с цепной линией, а с *катеноидой* — с поверхностью, образуемой вращением цепной линии. Еще одна физическая аналогия — мыльная пленка свисает с кольца, а в нижней ее части скопилась влага в виде капли.

Можно также попытаться найти псевдоаналитическое решение этой новой задачи.

Задания для студентов

Рассмотренная задача о цепочке без кулона хороша тем, что в ней не нужно учитывать силу трения между цепочкой и цилиндром. А вот задачи, в которых эту силу необходимо учитывать, пренебрегая ею в отдельных случаях:

1. На цепочку подвешено два, три и т. д. кулона разной массы. К исходным данным прибавляются длины отрезков цепочки с местами крепления смежных кулонов.
2. Цепочка имеет переменную удельную массу. Это, к примеру, нитка жемчуга с перлами разной величины [5].
3. Цилиндр с накинута на него цепочкой с кулоном начинается вращаться вокруг своей горизонтальной оси. Определить угол поворота цилиндра, при котором цепочка начнет скользить на нем. Дополнительно задается некий коэффициент трения.
4. Цилиндр отклоняется от горизонтального положения. Определить угол наклона цилиндра, при котором цепочка начнет соскальзывать с него.
5. Цепочка закреплена на цилиндре — прибита гвоздиком в его верхней части. Цилиндр вращается вокруг своей горизонтальной оси. Как будет меняться форма провисающей цепочки без и с кулоном? Цепочка может быть достаточно длинной и наматываться на цилиндр.
6. Замкнутая цепочка (с кулоном и без него) накинута не на круглый цилиндр, а цилиндр с эллипсом в сечении. Цилиндр вращается вокруг своей горизонтальной оси. Как будет

Глава 1

меняться форма цепочки. Можно опробовать и другие формы сечения горизонтального цилиндра.

7. Цепочку с кулоном или без кулона отклонить в сторону и отпустить в свободный полет. Как будет колебаться этот маятник?

Литература:

1. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. — М.: Наука, 1980 (<https://dwg.ru/lib/1317>).
2. Зубелевич О. Э., Самсонов В. А. Цепь на конусе // Сб. науч.-метод. статей. Теоретическая механика. Вып. 30 / Под ред. В. А. Самсонова — М. : Изд-во МГУ, 2018. С. 131–138.
3. Очков В. Ф., Нори М., Очкова Н.А. Физико-математическая информатика с цепочкой // Cloud of Science. Том 6 №1, 2019. С. 5-47 (https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_21_005.pdf)
4. Очков В. Ф., Попова К., Камалов М. Цепная линия // Физика для школьников. № 3. 2018. С. 24-32 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/fizika_dlya_shkolnikov_2018_03.pdf)
5. Н. С. Лесков. Жемчужное ожерелье (<https://www.youtube.com/watch?v=DZPxQF4bkiI>)
6. Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. и доп.— СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 560 с.: ил. (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf>)
7. Valery Ochkov. 2⁵ Problems for STEM Education. Chapman and Hall/CRC. 2020. 374 pp. <https://www.routledge.com/2-Problems-for-STEM-Education/Ochkov/p/book/9780367345259>