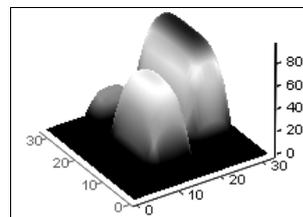


ЭТЮД 15



Цикл Отто, или что скрывается за упрощенной формулой

Цикл Отто — это один из термодинамических циклов, которые используются в двигателях внутреннего сгорания. Он состоит (в идеальной версии) из двух изохор (сгорание топливно-воздушной смеси в цилиндре двигателя и выхлоп газов) и двух изэнтроп (сжатие топливно-воздушной смеси в цилиндре и расширение газов при рабочем ходе поршня). В справочниках и учебниках по термодинамике можно найти формулу, по которой рассчитывается термический КПД цикла Отто. На рис. 15.1 отображен фрагмент интернет-страницы с этой формулой для интерактивного ее использования: можно поменять значение степени сжатия r (отношения максимального объема к минимальному объему цилиндра), C_p и C_v (изобарная и изохорная) теплоемкости рабочего тела цикла Отто, привязанные к универсальной газовой постоянной R), и получить новое значение η_t с фиксацией точки на графике зависимости КПД от степени сжатия.

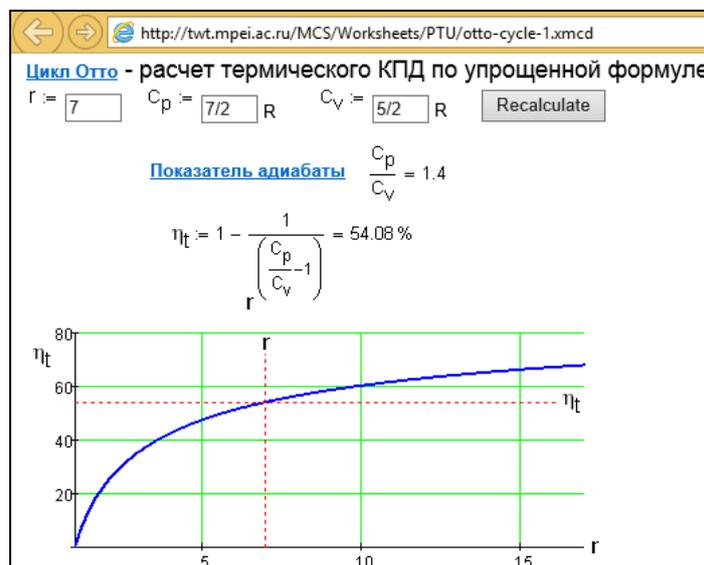


Рис. 15.1. Термический КПД цикла Отто

Подобные формулы для других циклов двигателей внутреннего сгорания (Дизеля, Брайтона, Тринклера, Калины и др.) можно найти в Интернете (см. например http://en.wikipedia.org/wiki/Thermodynamic_cycle).

Откуда взялась формула, показанная на рис. 15.1? На рис. 15.2 представлен расчет параметров газа в четырех узловых точках цикла Отто с опорой на базовые понятия (определения) термодинамики: что такое энтропия s и что такое внутренняя энергия u .

Расчет цикла Отто для идеального газа

$T_0 := 1\text{K}$ $p_0 := 1\text{Pa}$ $R := 8.314472 \cdot \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}}$ $c_p := \frac{7}{2}R$ $c_v := \frac{5}{2}R$ $\text{kJ} := 1000\text{J}$

Исходные данные $p_1 := 1\text{atm}$ $T_1 := 300\text{K}$ $n := 7 \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3}$ $T_3 := 1200\text{K}$

Point 1 $v_1 := \frac{R \cdot T_1}{p_1} = 0.024617 \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

$$s_1 := \int_{T_0}^{T_1} \frac{c_p}{T} dT - R \int_{p_0}^{p_1} \frac{1}{p} dp = 70.15 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad u_1 := \int_{T_0}^{T_1} c_v dT = 6.215 \frac{\text{kJ}}{\text{mole}}$$

Point 2 $v_2 := \frac{v_1}{n} = 3.517 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$ $s_2 := s_1$ Изоэнтропа
 Given $T_2 := 500\text{K}$ $p_2 := 20\text{atm}$ Первое приближение
 $p_2 \cdot v_2 = R \cdot T_2$ $s_2 = \int_{T_0}^{T_2} \frac{c_p}{T} dT - R \int_{p_0}^{p_2} \frac{1}{p} dp$ $\begin{pmatrix} T_2 \\ p_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(T_2, p_2)$

$T_2 = 653.373\text{K}$ $p_2 = 15.245\text{atm}$ $u_2 := \int_{T_0}^{T_2} c_v dT = 13.56033 \frac{\text{kJ}}{\text{mole}}$

Point 3 $v_3 := v_2$ Изохора $p_3 := \frac{R \cdot T_3}{v_3} = 2.837 \times 10^6 \text{Pa}$

$$s_3 := \int_{T_0}^{T_3} \frac{c_p}{T} dT - R \int_{p_0}^{p_3} \frac{1}{p} dp = 82.787 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad u_3 := \int_{T_0}^{T_3} c_v dT = 24.923 \frac{\text{kJ}}{\text{mole}}$$

Point 4 $s_4 := s_3$ Изоэнтропа $v_4 := v_1$ Изохора
 Given $T_4 := 500\text{K}$ $p_4 := 1\text{atm}$ Первое приближение
 $p_4 \cdot v_4 = R \cdot T_4$ $s_4 = \int_{T_0}^{T_4} \frac{c_p}{T} dT - R \int_{p_0}^{p_4} \frac{1}{p} dp$ $\begin{pmatrix} T_4 \\ p_4 \end{pmatrix} := \text{Find}(T_4, p_4)$

$T_4 = 550.988\text{K}$ $p_4 = 1.837\text{atm}$ $u_4 := \int_{T_0}^{T_4} c_v dT = 11.432 \frac{\text{kJ}}{\text{mole}}$

$q_1 := u_3 - u_2 = 11.362 \frac{\text{kJ}}{\text{mole}}$ $q_2 := u_4 - u_1 = 5.217 \frac{\text{kJ}}{\text{mole}}$

$h_t := \frac{q_1 - q_2}{q_1} = 54.084\%$ $1 - \frac{1}{\frac{c_p}{c_v} - 1} = 54.084\%$ Проверка по формуле

а)

Удельная внутренняя энергия — это интеграл удельной изохорной теплоемкости по температуре от T_0 до T .

В расчете, показанном на рис. 15.2, в точках 2 (окончание процесса сжатия топливно-бензиновой смеси) и 4 (окончание процесса рабочего хода поршня), решается уравнение, в котором неизвестными величинами являются пределы интегрирования — значения температуры и давления. В конце расчета, показанного на рис. 15.2, выдаются два ответа: полученные через поточечный расчет (он в рамке) и по формуле, полученной в результате предварительного символьного интегрирования. Оба ответа совпали.

Если подынтегральное выражение содержит постоянный множитель — константу (а в нашем расчете принято, что c_p и c_v не зависят от температуры), то эту константу можно вынести за знак интеграла и взять его без константы, а потом умножить на эту константу. На рис. 15.3 и 15.4 показано, как это сделал символьный процессор Mathcad.

$$\int_{t_0}^t \frac{c_p}{T} dT - R \int_{p_0}^p \frac{1}{P} dP \rightarrow c_p \cdot (\ln(t) - \ln(t_0)) - R \cdot (\ln(p) - \ln(p_0))$$

$$c_p := \frac{7}{2} R = 29.101 \frac{J}{mole \cdot K} \quad t_0 := K \quad p_0 := Pa$$

$$t := 18 \text{ } ^\circ C \quad p := 1 \text{ } atm$$

$$s := c_p \cdot (\ln(t) - \ln(t_0)) - R \cdot (\ln(p) - \ln(p_0))$$

Эти единицы измерения несовместимы.

$$s := c_p \cdot \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = 69.279 \frac{J}{mole \cdot K}$$

Рис. 15.3. Расчет удельной энтропии идеального газа

Интересен расчет удельной энтропии с точки зрения использования единиц измерения — температуры и давления (см. *этиод 2*). Символьный процессор Mathcad выдал ответ, содержащий разность логарифмов. Чтобы эту формулу использовать для численных расчетов, нужно вспомнить, что разность логарифмов равна логарифму дроби (см. рис. 15.3), и подправить формулу.

Если в расчете, показанном на рис. 15.2, продолжить преобразования и упрощения типа тех, которые представлены на рис. 15.3 и 15.4, то мы, в конце концов, получим формулу на рис. 15.1.

$$\int_{t_0}^t c_v dT \rightarrow c_v \cdot (t - t_0)$$

$$c_v := \frac{5}{2} R = 20.786 \frac{J}{mole \cdot K}$$

$$t_0 := K$$

$$t := 18 \text{ } ^\circ C$$

$$u := c_v \cdot (t - t_0) = 6031.1 \frac{J}{mole}$$

Рис. 15.4. Расчет внутренней энергии идеального газа

Но следует помнить о том, что удельная изобарная и изохорная теплоемкости реального рабочего тела цикла Отто зависят от температуры и давления, а сам состав рабочего тела меняется. Поэтому расчет, показанный на рис. 15.2, хотя и сложен, но более интересен в плане его совершенствования и приближения к реальному термодинамическому процессу — к циклу двигателя внутреннего сгорания, циклу Отто.

На сайте книги читатель найдет и другие интерактивные страницы по расчету цикла Отто. На рис. 15.5 показан сайт, где посетитель может:

- выбрать рабочее тело цикла;
- указать его параметры (p_1 , T_1 , n и T_3);
- выбрать вид диаграммы, отображающей процесс;
- указать точку, по которой будет показано положение поршня (здесь приведены все рисунки, но на сайте демонстрируется один из них с отображением соответствующей точки на диаграмме цикла Отто).

На рис. 12.6 в *этюде 12*, где описываются приемы создания анимации в среде Mathcad, показана анимация цикла Отто, размещенная в Интернете на форуме пакета Mathcad PlanetPТС.

Если в расчете, показанном на рис. 15.2 заменить операторы $v_3 := v_2$ и $p_3 := R \cdot T_3 / v_3$ на операторы $p_3 := p_2$ и $v_3 := R \cdot T_3 / p_3$, то будет вестись расчет цикла Дизеля, где подвод тепла ведется не по изохоре, а по изобаре.

Расчет на рис. 15.2 можно преобразовать так, чтобы он превратился в некое тестовое задание для студентов (рис. 15.6 и 15.7).

Если в расчете на рис. 15.2 показаны все формулы, но на сайте, отображенном на рис. 15.7, вместо формул размещены пустые текстовые поля, заполняемые соответствующими формулами, по которым вычисляется термический КПД идеального цикла Отто. Если заполнить все поля формулами и нажать кнопку **Ready** (Готово), то в конце интернет-теста (см. рис. 15.7) будет выдан ответ (термический КПД цикла Отто), который можно будет сравнить с ответом, выдаваемым упрощенной фор-

← → http://twf.mpei.ac.ru/MAS/Worksheets/Therm/otto_ideal_cycle_test.mcd

Цикл Отто: введите формулы и решите задачу

$P1, \text{ Pa} := 1\text{e}6$ $r := 7$ $T1, \text{ K} := 300$ $T3, \text{ K} := 1200$
 $R := 8.314472 \cdot \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}}$ $Cp := \frac{7}{2} * R$ $Cv := \frac{5}{2} * R$

Точка 1

$V1 :=$ $S1 :=$
 $H1 :=$ $U1 :=$ Ready

$V1 = \frac{\text{m}^3}{\text{mole}}$ $S1 = \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}}$ $H1 = \frac{\text{J}}{\text{mole}}$ $U1 = \frac{\text{J}}{\text{mole}}$

Точка 2 $V2 :=$ $S2 :=$

Given =

=
 $\left(\begin{matrix} P2 \\ T2 \end{matrix} \right) := \text{Find}(P2, T2)$ $P2 =$ Pa $T2 =$ K Ready

Рис. 15.6. Начало теста по знанию расчета цикла Отто

← → http://twf.mpei.ac.ru/MAS/Worksheets/Therm/otto_ideal_cycle_test.mcd

Цикл Отто: решение задачи

$P1, \text{ Pa} := 1\text{e}6$ $r := 7$ $T1, \text{ K} := 300$ $T3, \text{ K} := 1200$
 $R := 8.314472 \cdot \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}}$ $Cp := \frac{7}{2} * R$ $Cv := \frac{5}{2} * R$ Recalculate

Точка 1

$V1 := R * T1 / P1$ $S1 := \int(\text{Cp}/T, T=T0..T1) - R * \int(1/P, P=P0..P1)$
 $H1 := \int(\text{Cp}, T=T0..T1)$ $U1 := \int(\text{Cv}, T=T0..T1)$

$V1 = 2.494 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{mole}}$ $S1 = 51.115 \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}}$
 $H1 = 8.701 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{mole}}$ $U1 = 6.215 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{mole}}$

Точка 2 $V2 := \sqrt{V1 / r}$ $S2 := S1$ Линия 1-2: изэнтропа

Given $P2 * V2 = R * T2$

= $\int(\text{Cp}/T, T=T0..T2) - R * \int(1/P, P=P0..P2)$
 $\left(\begin{matrix} P2 \\ T2 \end{matrix} \right) := \text{Find}(P2, T2)$ $P2 = 1.525 \times 10^7 \text{ Pa}$ $T2 = 853.37 \text{ K}$

$H2 := \int(\text{Cp}, T=T0..T2)$ $U2 := \int(\text{Cv}, T=T0..T2)$

$q1 := U3 - U2$ $q2 := U4 - U1$ $\eta_t := (q1 - q2) / q1$

Ваш ответ $\eta_t = 54.084 \%$ Правильный ответ $\eta_t = 1 - \frac{1}{r^{\frac{Cp}{Cv} - 1}} = 54.084 \%$

Рис. 15.7. Окончание теста по знанию расчета цикла Отто

Литература

1. Очков В. Ф., Александров А. А., Орлов К. А. Термодинамические циклы: расчеты в Интернете // Вестник МЭИ. — 2007. — № 1. — С. 43–50. URL: http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/Therm_Cycle_Art/index.html.